5. Potenzen und Potenzfunktionen

165 **Einstiegsseite:**

➔ $40\,000\ \text{km} = 40\,000\,000\ \text{m} = 4 \cdot 10^7\ \text{m}$

➔ 150 Millionen $\text{km} = 150\,000\,000\ \text{km} = 15 \cdot 10^7\ \text{km} = 1{,}5 \cdot 10^8\ \text{km}$

➔ $0{,}06\ \text{nm} = \frac{6}{100\,000\,000\,000}\ \text{m} = \frac{6}{10^{11}}\ \text{m} = \frac{6}{100\,000\,000}\ \text{km} = \frac{6}{10^8}\ \text{km}$

Lernfeld: Mit „… hoch …“ hoch hinaus

166 Weitgehend eigenständig entdecken die Schülerinnen und Schüler die Potenzgesetze durch zielgerichtetes Experimentieren mit oder ohne Rechnerhilfe. Sie üben sich dabei im mathematischen Argumentieren, entwickeln eigenständig Problemlösestrategien und vertiefen ihre Erfahrungen im Umgang mit formalen Darstellungen in der Algebra.
Die Aufgabenstellungen ermöglichen Eigenaktivitäten und Kommunikation. In Partnerarbeit festigen die Schülerinnen und Schüler das erworbene Wissen. Sie schärfen in der direkten Auseinandersetzung mit dem Partner das Überprüfen von Lösungstrategien und mathematische Argumentationsketten.

1. Auftrag: Rasantes Wachstum

Die 1 km^2 große Fläche mit Wasserhyazinthen vervierfacht sich jeden Monat.

➔ Größe nach 1 Monat:	$4\ \text{km}^2$
Größe nach 2 Monaten:	$16\ \text{km}^2$
Größe nach 3 Monaten:	$64\ \text{km}^2$
Größe nach 4 Monaten:	$256\ \text{km}^2$
Größe nach 5 Monaten:	$1\,024\ \text{km}^2$
Größe nach 6 Monaten:	$4\,096\ \text{km}^2$
Größe nach 7 Monaten:	$16\,384\ \text{km}^2$
Größe nach 8 Monaten:	$65\,536\ \text{km}^2$
Größe nach 9 Monaten:	$262\,144\ \text{km}^2$
Größe nach 10 Monaten:	$1\,048\,576\ \text{km}^2$

➔ Größe vor 1 Monat:	$\frac{1}{4}\ \text{km}^2 = 0{,}25\ \text{km}^2 = 25\ \text{ha}$
Größe vor 2 Monaten:	$\frac{1}{16}\ \text{km}^2 = 0{,}0625\ \text{km}^2 = 6{,}25\ \text{ha}$
Größe vor 3 Monaten:	$\frac{1}{64}\ \text{km}^2 = 0{,}015625\ \text{km}^2 \approx 1{,}56\ \text{ha}$
Größe vor 4 Monaten:	$\frac{1}{256}\ \text{km}^2 \approx 0{,}00390625\ \text{km}^2 \approx 3\,906\ \text{m}^2$
Größe vor 5 Monaten:	$\frac{1}{1\,024}\ \text{km}^2 \approx 0{,}0009765625\ \text{km}^2 \approx 977\ \text{m}^2$
Größe vor 6 Monaten:	$\frac{1}{4\,096}\ \text{km}^2 \approx 0{,}0002441406\ \text{km}^2 \approx 244\ \text{m}^2$
Größe vor 7 Monaten:	$\frac{1}{16\,384}\ \text{km}^2 \approx 0{,}0000610352\ \text{km}^2 \approx 61\ \text{m}^2$
Größe vor 8 Monaten:	$\frac{1}{65\,536}\ \text{km}^2 \approx 0{,}0000152588\ \text{km}^2 \approx 15\ \text{m}^2$

166 **1. Auftrag:** Fortsetzung

➔ Größe vor 9 Monaten: $\frac{1}{262\,144}\,\text{km}^2 \approx 0{,}0000038147\,\text{km}^2 \approx 4\,\text{m}^2$

Größe vor 10 Monaten: $\frac{1}{21\,048\,576}\,\text{km}^2 \approx 0{,}0000009537\,\text{km}^2 \approx 1\,\text{m}^2$

➔ Nach einem Jahr: $4^{12} = 16\,777\,216$

In einem halben Monat: $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

In einem viertel Monat: $\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \; \frac{1}{\sqrt{\sqrt{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$

An einem Tag $\left(\frac{1}{30}\text{ Monat}\right)$: $\frac{1}{\sqrt[30]{4}} \approx 0{,}95484$

2. Auftrag: Würfelspiel „Sechs ist aus“

Die Schülerinnen und Schüler sollen erste Erfahrungen mit einer Exponentialfunktion gewinnen. Der Zugang über ein Würfelspiel vernetzt darüber hinaus mit Erfahrungen, die bei mehrstufigen Zufallsexperimenten gewonnen wurden.

➔ Die Anzahl der Würfel könnte sich folgendermaßen entwickeln:

Nach Spiel	1	2	3	4	5	6	7
Würfelanzahl	34	28	23	19	15	13	11

Nach ca. 15 – 20 Würfen ist kein Würfel mehr im Spiel.

➔ Die Anzahl der Würfel, die noch im Spiel sind, soll in einem Liniendiagramm in Abhängigkeit von der Spielnummer für mehrere verschiedene Versuche dargestellt werden. Die Simulation mit einem Rechner ermöglicht das schnelle Erzeugen vieler Versuchsserien.

➔ Mithilfe der Pfadregel kann für die Anzahl w (n) nach dem n-ten Spiel der Term $w(n) = 40 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$ begründet werden.

3. Auftrag: Hoch mal hoch, was ist da los?

Die Schülerinnen und Schüler begründen die vorgegebene Vereinfachung mithilfe der Definition für Potenzen mit gleicher Basis und mit natürlichem Exponenten. Sie verändern die Exponenten, wenden die Definition an und argumentieren analog. Durch Generalisieren und Verallgemeinern gelangen sie zu der Formel für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis und mit natürlichem Exponenten. Entsprechende Überlegungen führen zu der Formel für die Division von Potenzen mit gleicher Basis und mit natürlichem Exponenten sowie zu der Erkenntnis, dass es keine Gesetze für die Addition und Subtraktion gibt, da eine Vereinfachung nicht möglich ist.

Die Verfügbarkeit eines CAS verändert die Blickrichtung der Argumentation, da der Rechner das Ergebnis vorgibt und diese somit nicht mehr über die direkte Anwendung der Definition von dem Lernenden selbst gefunden wird.

➔ Die Notizen von Mehmed liefern sowohl einen Ausgangspunkt für eine Vermutung für das Potenzgesetz zum Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis als auch für eine Begründung.

Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert. Die Basis bleibt erhalten.

166 **3. Auftrag:** Fortsetzung

➔ Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass es für das Addieren und Subtrahieren von Potenzen keine einfachen Regeln gibt. Beim Dividieren von Potenzen kann sowohl der Fall gleicher Exponenten als auch der Fall gleicher Basen untersucht werden.
Man multipliziert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen multipliziert. Der Exponent bleibt erhalten.
Man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert. Die Basis bleibt erhalten.
Eine Summe oder Differenz kann man vereinfachen, wenn dabei gleichartige Glieder zusammengefasst werden.
Man dividiert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten subtrahiert. Die Basis bleibt erhalten.
Man dividiert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen dividiert. Der Exponent bleibt erhalten.

➔ Das Experimentieren mit einem Computer-Algebra-System bietet sich an dieser Stelle an, das man sehr leicht Vermutungen gewinnen und überprüfen kann. Die Beweisnotwendigkeit kann dennoch durch die Frage nach dem Vorgehen des CAS erzeugt werden.

5.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

5.1.1 Definition und Anwendung der Potenzen mit natürlichen Exponenten

167 **Einstieg:**

a)

Zeit in (h)	1	2	3	4	5	6	…
Anzahl der Salmonellen	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	2^5	2^6	…

b) t: Anzahl der vergangenen Stunden
y: Anzahl der Salmonellen
$y = 2^t$

c) Nach 20 Stunden sind es $10 \cdot 2^{20} = 10\,485\,760$ Salmonellen.

169 **2. a)** **(1)** $7{,}8543 \cdot 10^4$ **(3)** $9{,}245682 \cdot 10^6$
(2) $2{,}8433 \cdot 10^4$ **(4)** $1 \cdot 10^4 = 10^4$

b) Wenn das Ergebnis zu viele Ziffern hat, verwendet der Taschenrechner die Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen.

c) Meist gibt es eine besondere Taste für die verkürzte Eingabe der Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (z. B. die Tasten E; EE; Exp, …) bzw. findet die Befehle in einem Untermenü des Rechners.

169

3. **a)** 1; 10; 100; 1 000; 10 000; 100 000; 1 000 000; 10 000 000; 100 000 000; 1 000 000 000; 10 000 000 000
b) 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1 024
c) 1; 3; 9; 27; 81; 243; 729
d) 1; 5; 25; 125; 625; 3 125
e) 1; –2; 4; –8; 16; –32; 64; –128; 256; –512; 1 024
f) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001
g) $\frac{1}{1} = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{64};\ \frac{1}{128};\ \frac{1}{256};\ \frac{1}{512};\ \frac{1}{1024}$
h) $1;\ \sqrt{2};\ 2;\ 2\sqrt{2};\ 4;\ 4\sqrt{2};\ 8$

170

4. –

5. **a)** $2^4 < 2^5$ **b)** $2^4 < 3^4$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$ **d)** $2^4 = 4^2$ **e)** $3^0 = 7^0$

6. **a)** $2 + 2 + 2 + 2 + 2 < 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $5 + 5 < 5 \cdot 5$
c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
d) $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) < (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

7. **a)** $8 < 9$ **b)** $-125 < 125$ **c)** $625 > -625$ **d)** $4 > -4$ **e)** $-8 = -8$ **f)** $2^6 = 6^4 < 256 = 2^8$

8. a^n ist negativ, wenn $a < 0$ und n ungerade ist. a^n ist 0, wenn gilt $a = 0$ und $n > 0$. In allen anderen Fällen ist a^n positiv.

9. Es gibt die Ausnahmen $a^0 = 1$ und $a^1 = a$. Das sind keine Produkte aus gleichen Faktoren.

10. $0^0 = 1$
Der Graph zu $y = x^0$ ist für $x < 0$ und $x > 0$ identisch mit dem Graphen zu $y = 1$. Daher ist auch für $x = 0$ die Definition $0^0 = 1$ sinnvoll, denn dann ist der Funktionswert 1 und der zugehörige Punkt liegt auch auf dem Graphen von $y = 1$.

11. **a)** $16 > -16$ **b)** $-64 = -64$ **c)** $1 > -1$ **d)** $10\,000 > -10\,000$ **e)** $64 < 256$ **f)** $-8 < 9$

12. Patrick muss Klammern setzen, da sonst das Minuszeichen vor der Potenz steht und nicht potenziert wird: $(-47)^4 = 4\,879\,681$

13. **a)** 1,331 **b)** $\frac{81}{625} = 0{,}1296$ **c)** 1 **d)** $-\frac{8}{27} = -0{,}296296$ **e)** 2 401 **f)** 0,00000001 **g)** 1 **h)** $\frac{1}{4} = 0{,}25$ **i)** 0,8170728… **j)** 1,22019…

170

14. a) $8^2 = 4^3 = 2^6 = (-8)^2 = (-2)^6$
b) $(-5)^3 = -5^3$
c) $25^2 = 5^4 = (-25)^2 = (-5)^4$
d) $16^2 = 4^4 = 2^8 = (-16)^2 = (-4)^4 = (-2)^8$
e) $20^2 = (-20)^2$
f) $100^2 = 10^4 = (-100)^2 = (-10)^4$
g) $\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(-\frac{1}{16}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^8$
h) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$
i) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$
j) $0{,}5^3$
k) *Beispiele*: $1^7 = 3^0 = 17^0 = 0^0 = (-1)^8 = (-4)^0$
l) $2{,}5^2 = (-2{,}5)^2$

15. Die n-te Figur enthält 2^{n-1} Punkte, die 12. Figur enthält also $2^{11} = 2\,048$ Punkte.

171

16. 9^9 [$9^{(9^9)}$]

17. a)

Zeit (in h)	1	2	3	4	5	…	[1	2	3	…]
Fläche (in cm²)	3	9	27	81	243	…	[2,5	6,25	15,625	…]

Allgemein gilt für die Fläche A (in cm²) und die Zeit t (in Stunden):
$A = 3^t$ [$A = 2{,}5^t$]

b) –

18.

Zeit (in Wochen)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Masse (in mg)	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	…

Allgemein gilt für die Masse m (in mg) und die Zeit t (in Wochen): $m = 512 \cdot 0{,}5^t$

19. a) $3{,}507 \cdot 10^3$; $4{,}85 \cdot 10^1$; $1{,}2304 \cdot 10^1$; $7{,}548048 \cdot 10^5$
b) 430; 8 357; 720 000; 37 542,1

20. a) 1 000 000 000 000 km³ (Billion)
b) 30 300 000 km² (Million)
c) 150 000 000 km (Million)
d) 940 000 000 km (Million)

21. a) $3 \cdot 10^5\ \frac{km}{s}$
b) $1{,}39 \cdot 10^6$ km
c) $3{,}84 \cdot 10^5$ km
d) $4{,}16 \cdot 10^7$ km²
e) $4{,}5 \cdot 10^9$ km
f) $3{,}962 \cdot 10^9$ Jahre

22. Hier wurde mit 365 Tagen pro Jahr gerechnet, das sind 31 536 000 s.
a) $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km
b) 500 s = 8 min 20 s
c) $9{,}4608 \cdot 10^{17}$ km
d) $6{,}3 \cdot 10^5$ Jahre

172

23. a) 1 GB = 2^{30} Byte = 1 073 741 824 Byte (siehe Schülerband Seite 21).
222 627 688 448 Byte ≈ 207,338 GB ≈ 207 GB
777 574 350 848 Byte ≈ 207,338 GB ≈ 207 GB
b) 1 kB = 2^{10} Byte; 671 088,64, also gut 671 000 Briefe.
c) 1 MB = 2^{20} Byte, 1 GB = 2^{30} Byte, 1 TB = 2^{40} Byte
(1) 1 780,87, also 1 780 Bilder **(2)** 227 951,3, also 227 951 Bilder

5.1.2 Erweiterung des Potenzbegriffs auf negative ganzzahlige Exponenten

Einstieg:

a)

Zeit (in h)	−1	−2	−3	−4	−5	…
Anzahl der Salmonellen	500 000	250 000	125 000	62 500	31 250	…

b) $y = 1\,000\,000 \cdot 2^{-t}$

174

2. a) **(1)** $7{,}9 \cdot 10^{-4}$ **(2)** $2{,}53 \cdot 10^{-5}$ **(3)** $4{,}29 \cdot 10^{-7}$ **(4)** $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ **(5)** $1 \cdot 10^{-4}$
b) Das Ergebnis wird in Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen angezeigt. Der Taschenrechner kann die Anzahl der Ziffern nach dem Komma nicht mehr anzeigen.
c) **(1)** 0,004567
(2) $-3{,}56789 \cdot 10^{-21}$ Ergebnis hat zu viele Stellen nach dem Komma.
(3) −0,001

3. a) 1 000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001
b) 27; 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$
c) 125; 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$
d) −64; 16; −4; 1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{64}$
e) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8

4. –

5. a^n ist negativ, wenn $a < 0$ und n ungerade ist.
In den anderen Fällen ist an positiv $(a \neq 0)$.

6. a) $\frac{1}{8}$; −8; −8; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{25}$; −25; 25; $\frac{1}{25}$; $-\frac{1}{25}$

7. a) $9{,}5367\ldots \cdot 10^{-7}$
b) 17,34665…
c) $-1{,}9039\ldots \cdot 10^{-4}$
d) 7,59375
e) $7{,}12778\ldots \cdot 10^{-3}$
f) $1{,}7469\ldots \cdot 10^{-5}$

175

8. a) $-5^{-2} = -\frac{1}{25}$
b) Richtig, da $\frac{1}{16} < \frac{1}{8}$
c) Richtig, da $0{,}1 = \frac{1}{10}$
d) Falsch, da $8 > \frac{1}{8}$
e) Falsch, da $\frac{16}{9} > -\frac{16}{9}$
f) Richtig, da $1 > -\frac{1}{27}$
g) Richtig, da $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
h) Richtig, da $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$
i) Richtig, da $-\frac{1}{2\sqrt{2}} < 0$

175

9. a) $15^3 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3}{5\cdot5} = \frac{5\cdot3\cdot3\cdot3}{1} = 5\cdot3^3 = 5\cdot27 = 135$

b) $\frac{1}{14^3}\cdot7^5 = \frac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{14\cdot14\cdot14} = \frac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{2\cdot7\cdot2\cdot7\cdot2\cdot7} = \frac{7\cdot7}{2\cdot2\cdot2} = \frac{49}{8} = 6{,}125$

c) $\frac{21^3}{7^5} = \frac{21\cdot21\cdot21}{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7} = \frac{3\cdot7\cdot3\cdot7\cdot3\cdot7}{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7} = \frac{3\cdot3\cdot3}{7\cdot7} = \frac{27}{49} \approx 0{,}551$

d) $\frac{(-2)^6}{2^8} = \frac{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{1}{2\cdot2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

10. $16^{-1} = 4^{-2} = 2^{-4} = (-2)^{-4} = (-4)^{-2}$
$25^{-1} = 5^{-2} = (-5)^{-2}$
$64^{-1} = 8^{-2} = 4^{-3} = 2^{-6} = (-8)^{-2} = (-2)^{-6}$
$625^{-1} = 25^{-2} = 5^{-4} = (-25)^{-2} = (-5)^{-4}$
$256^{-1} = 2^{-8} = 4^{-4} = 16^{-2} = (-2)^{-8} = (-4)^{-4} = (-16)^{-2}$
$27^{-1} = 3^{-3}$
$900^{-1} = 30^{-2} = (-30)^{-2}$
$1\,600^{-1} = 40^{-2} = (-40)^{-2}$
$40\,000^{-1} = 200^{-2} = (-200)^{-2}$
$250\,000^{-1} = 500^{-2} = (-500)^{-2}$
$16\,900^{-1} = 130^{-2} = (-130)^{-2}$

11. a) $x \neq 0$
b) $z \neq 0$
c) $z \neq -1$
d) $a \neq 0$ und $b \neq 0$
e) $a \neq -2$ und $b \neq 0$

12. a) $\frac{1}{(2a)^3}$
b) $\frac{1}{(3ab)^4}$
c) $\frac{1}{5x}$
d) x^4
e) $\frac{1}{(a+b)^5}$
f) $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$
g) $\frac{a}{(x+y)^2}$
h) $a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$
i) $\frac{y}{x^2}$
j) $\frac{a+1}{(b-1)^3}$

13. a) x^{-1}
b) $(a\cdot b)^{-3}$
c) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3}$
d) $a\cdot c^{-5}$
e) $x^3\cdot(4y)^{-1}$
f) $(a+b)^{-2}$
g) $(1+z)^{-1}$
h) x^3
i) $4y^4$
j) $x^{-4}\cdot y^{-1}$
k) $(x-y)^{-2}\cdot(x+y)^3$
l) $y^2\cdot z^3$

14. a) Richtig, denn wenn n gerade ist, dann ist $a^n > 0$ also auch $\frac{1}{a^n} > 0$.
b) Falsch, Gegenbeispiel: $2^{-3} = \frac{1}{8} > 0$ mit n ungerade.
c) Richtig, wenn ein Bruch größer als 1 ist, dann ist der Kehrwert des Bruches kleiner als 1.
d) Richtig, denn der Kehrbruch eines Bruches $\frac{1}{a}$ mit $0 < \frac{1}{a} < 1$ ist größer als 1.
e) Richtig, wenn ein Bruch kleiner als 1 und größer als 0 ist, dann ist der Kehrwert des Bruches größer als 1.
f) Falsch, Gegenbeispiel: $(-2)^3 = -8 < 0$ mit n ungerade.

15. Der grün gefärbte Anteil im n-ten Quadrat ist $\frac{1}{2^{n-1}}$.
Der Anteil im 10. Quadrat beträgt also: $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} = 2^{-9}$

175

16. a) $1 \cdot 10^{-2}$ **c)** $6{,}8 \cdot 10^{-1}$ **e)** $3{,}9 \cdot 10^{-5}$
b) $7 \cdot 10^{-2}$ **d)** $4{,}9 \cdot 10^{-3}$

17. a) 0,03 **c)** 0,0000075 **e)** 0,000003
b) 0,00042 **d)** 0,0000253

176

18. (1) 0,0007 cm **(4)** 0,000086 m **(5)** 0,0055 g
(2) 0,000094 cm **(3)** 0,00025 m

19. a) 3 g **b)** $2 \cdot 10^{-5}$ kg **c)** $5 \cdot 10^{-7}$ mm **d)** $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ m

20. a) **(1)** 10^{-6} m = 1 Mikrometer
(2) 10^{-7} m = 100 Nanometer
(3) 10^{-9} m = 1 Nanometer
(4) 10^{-6} m = 1 Mikrometer
(5) 10^{-6} m = 1 Mikrometer
b) $\frac{m}{s}$ und $\frac{km}{h}$ sind Einheiten für die Geschwindigkeit.
$\frac{g}{cm^3}$ ist eine Einheit für die Dichte.
$\frac{N}{m^2}$ ist eine Einheit für den Druck.

21. –

22. Abhängig vom Taschenrechner, z. B.: $9{,}99 \cdot 10^{-99}$ $[9{,}99 \cdot 10^{99}]$

23. a) 0,01 m = 1 cm Zum Beispiel eine Murmel.
b) 9 990 kg

Das kann ich noch!

A) 1) $12x + 4 = 28$, also $x = 2$
2) $4x + 36 = 52$, also $x = 4$
3) $20x + 16 + 8 = 74$, also $x = 2{,}5$

5.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

5.2.1 Potenzen mit Stammbrüchen als Exponenten – n-te Wurzeln

177

Einstieg:
a) 5 cm **b)** Ungefähr 5,85 cm

179

2. a) (1)

8	2	8
27	3	27
512	8	512
729	9	729
1 331	11	1 331

(2)

5	125	5
6	216	6
12	1 728	12
20	8 000	20
30	27 000	30

Die Linke und die rechte Spalte der Tabellen stimmen jeweils überein.

b) (1) $\sqrt[5]{7\,776} = 6$; $6^5 = 7\,776$ (2) $8^5 = 32\,768$; $\sqrt[5]{32\,768} = 8$

$\sqrt[5]{100\,000} = 10$; $10^5 = 100\,000$ $11^5 = 161\,051$; $\sqrt[5]{161\,051} = 11$

c) 125; 4 913; 7; 2; 19; 74

180

3. a) *Beweis:* Der Bruch $\frac{m}{n}$ sei gekürzt.

$\frac{m}{n} = \sqrt[3]{2}$ bedeutet $\frac{m^3}{n^3} = 2 = \frac{2}{1}$. Wegen $\frac{m}{n}$ ist auch $\frac{m^3}{n^3}$ ein gekürzter Bruch, denn m3 enthält dieselben Primfaktoren wie m. Mit $\frac{m^3}{n^3} = \frac{2}{1}$ müsste $m^3 = 2$ und $n^3 = 1$ sein. Es gibt aber keine natürliche Zahl m, deren 3. Potenz gleich 2 ist und damit keine gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$ mit $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{2}$, d. h. $\sqrt[3]{2}$ ist irrational.

b) *Beweis:* Der Bruch $\frac{m}{n} = \sqrt[4]{8}$ sei gekürzt, damit auch $\frac{m^4}{n^4}$.
Wegen $\frac{m^4}{n^4} = 8 = \frac{8}{1}$ müsste $m^4 = 8$ sein. Es gibt aber keine natürliche Zahl m, deren 4. Potenz gleich 8 ist. Aus dem Widerspruch folgt, dass die Annahme falsch und $\sqrt[4]{8}$ irrational ist.

c) Aus der Annahme $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{216}$ erhält man keinen Widerspruch, da es eine natürliche Zahl $m = 6$ gibt, sodass $m^3 = 216$ ist.
$\sqrt[3]{216} = 6$ ist nicht irrational.

4. a) 2; denn $2^3 = 8$
b) 10; denn $10^3 = 1\,000$
c) 8; denn $8^3 = 512$
d) 2; denn $2^5 = 32$
e) 0,2; denn $0{,}2^3 = 0{,}008$
f) 4; denn $4^4 = 256$
g) 11; denn $11^2 = 121$
h) 0,3; denn $0{,}3^4 = 0{,}0081$
i) 1; denn $1^7 = 1$
j) 0,1; denn $0{,}1^5 = 0{,}00001$
k) 0; denn $0^{12} = 0$
l) $\frac{1}{2}$; denn $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
m) $\frac{2}{3}$; denn $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
n) $\frac{3}{2}$; denn $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$
o) $\frac{3}{4}$; denn $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

5. a) $\sqrt{25} = 5$
b) $\sqrt[3]{512} = 8$
c) wahr
d) wahr
e) $\sqrt[5]{3\,200\,000} = 20$
f) $\sqrt[6]{0{,}000001} = 0{,}1$
g) wahr
h) wahr

6. a) 2 und 3
b) 3 und 4
c) 7 und 8
d) 12 und 13
e) 4 und 5

180

7. **a)** $2\cdot 4 = 8$ **b)** $7 - 6 = 1$ **c)** $\sqrt[5]{32} = 2$ **d)** $\sqrt[3]{64} = 4$ **e)** $1 + 10 = 11$ **f)** $50\cdot 0{,}1 - 2 = 3$ **g)** $5\cdot 2 + 4\cdot 2 = 18$ **h)** $\frac{1}{7}\cdot 7 - \frac{1}{8}\cdot 8 = 0$

8. **a)** $6 = 6$; wahr **b)** $2 = 2$; wahr **c)** $4 \neq \sqrt{\sqrt{8}} = 1{,}68\ldots$; falsch **d)** $2 = 2$; wahr

9. **a)** 2 **b)** 2 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 0 **f)** 5 **g)** 3 **h)** $64^{0,\overline{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

10. **a)** $\sqrt[5]{a}$ **b)** $\sqrt[4]{x}$ **c)** $\sqrt[5]{y}$ **d)** $\sqrt{1 + x}$ **e)** $\sqrt[3]{a + b}$ **f)** $\sqrt[8]{n + 1}$

11. –

12. **a)** 81 **b)** 37 **c)** 1,2 **d)** 0 **e)** 8 **f)** 4

13. **a)** $|c|$; c beliebig **b)** $2a$; $a \geq 0$ **c)** $-|a|$; a beliebig **d)** $1{,}5\cdot|r|$; r beliebig **e)** $|a + b|$; a, b beliebig

181

14. **a)** 3 **b)** -18 **c)** richtig **d)** $\frac{1}{16}$

15. **a)**

n	**(1)** $\sqrt[n]{500}$	**(2)** $\sqrt[n]{0{,}01}$
2	22,3607	0,1
3	7,9370	0,2154
4	4,7287	0,3162
5	3,4657	0,3981

$\sqrt[n]{500}$ wird immer kleiner, ist aber immer größer als 1.

$\sqrt[n]{0{,}01}$ wird immer kleiner, ist aber immer größer als 1.

b) **(1)** $n \geq 9$ **(2)** $n \geq 7$

16. Für alle a wird der Radikand a^n bei geraden n positiv bzw. 0. Damit ist $\sqrt[n]{a^n}$ immer definiert. Für $a < 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = -a = |a|$. Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = a = |a|$.
Insgesamt folgt also $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
Für ungerade n und für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = a = |a|$.
Für n ungerade und negative a ist a^n auch negativ. Die n-te Wurzel ist also nicht definiert.
Wenn man diese Definition zulässt (vergleiche auch Information auf Seite 178 des Schülerbandes) erhält man:
Für $a < 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = -\sqrt[n]{|a|^n} = -|a| = a \neq |a|$.

5.2.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

181 **Einstieg**:

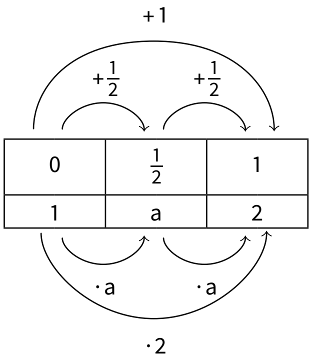
$\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h = 1\,h$

In einer halben Stunde wird die Anzahl der Salmonellen mit den Faktor a vervielfacht.

Dann gilt: $a \cdot a = 2^1$, also

$a^2 = 2^1 = 2$ und somit $a = \sqrt{2}$.

Nach einer halben Stunde sind $\sqrt{2}$ Mio. Salmonellen vorhanden, das sind ungefähr 1,414 Mio.



Viermal $\frac{5}{4}$ Stunden ergeben

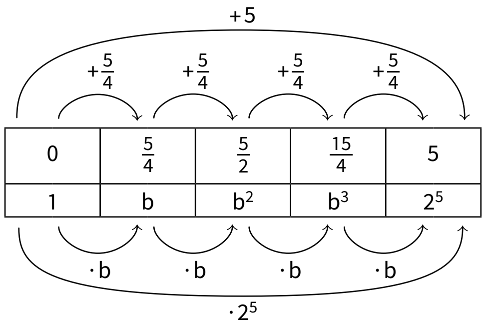
5 Stunden: $\frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{20}{4} = 5$

Wir suchen einen Faktor b, der die Anzahl der Salmonellen jeweils nach $\frac{5}{4}$h liefert.

Es gilt: $b \cdot b \cdot b \cdot b = 2^5$, also

$b^4 = 2^5$ und damit $b = \sqrt[4]{2^5}$.

Nach $\frac{5}{4}$h hat sich die Anzahl der Salmonellen auf $\sqrt[4]{2^5}$ Mio. vergrößert, das sind ungefähr 2,378 Mio.



183 **2.** $a^{1,5} = a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}} = a^{\frac{15}{10}}$ also $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[10]{a^{15}}$

Beweis des Satzes:

$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ also ist:

(1) $p = b \cdot n$ und $q = b \cdot m$ oder **(2)** $n = b \cdot p$ und $m = b \cdot q$ mit $b \in \mathbb{N}^*$

Damit folgt:

(1) $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{b\cdot m}{b\cdot n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ **(2)** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{b\cdot q}{b\cdot p}} = a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$

3. Die Hefekultur verdoppelt sich in einer Stunde.

a) Drei drittel Stunden ergeben zusammen eine Stunde.
Wir suchen also einen Vervielfachungsfaktor a mit $a \cdot a \cdot a = a^3 = 2$, also $a = \sqrt[3]{2}$.

b) $1\frac{1}{2}$ Stunden sind die Hälfte von 3 Stunden. In 3 Stunden ist die Hefekultur auf das 2^3-fache angewachsen. Wir suchen also einen Vervielfachungsfaktor a mit $a^2 = 2^3$, also $a = \sqrt{2^3}$.

4. **a)** $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8}$ **b)** $\sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[3]{2^4}$; $\sqrt{3}$

183

4. c) $\frac{1}{\sqrt{4}} = \sqrt{4^{-1}}$; $\frac{1}{\sqrt{5^3}} = \sqrt{5^{-3}}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[5]{2^{-2}}$ d) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3^3}$; $\sqrt[5]{5^{16}}$

5. a) $18^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $7^{\frac{1}{5}}$ b) $2^{\frac{4}{3}}$; $3^{-\frac{1}{4}}$; $3^{\frac{1}{2}}$ c) $4^{-\frac{2}{3}}$; $7^{-\frac{1}{5}}$; $2^{-\frac{3}{4}}$

6. a) $\sqrt[3]{x^2}$; $x > 0$
b) $\sqrt[4]{y^3}$; $y > 0$
c) $\sqrt[3]{a}$; $a > 0$
d) $\frac{1}{\sqrt[4]{b^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \sqrt[4]{b^{-3}}$; $x > 0$
e) $d^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d}$; $d > 0$
f) $e^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{e^4}$; $e > 0$
g) $p^{-\frac{26}{5}} = \frac{1}{p^{\frac{26}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{p^{26}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{p^{26}}} = \sqrt[5]{p^{-26}}$; $p > 0$
h) $a^{\frac{36}{5}} = \sqrt[5]{a^{36}}$; $a > 0$

7. a) $a^{\frac{5}{3}}$; $x^{\frac{2}{5}}$; $z^{\frac{5}{4}}$
b) $x^{-\frac{1}{4}}$; $z^{-\frac{2}{5}}$; $u^{-\frac{7}{3}}$
c) $x^{-\frac{3}{2}}$; $c^{\frac{4}{3}}$; $k^{\frac{1}{2}}$
d) $z^{-\frac{2}{3}}$; $x^{-\frac{4}{5}}$; $m^{-\frac{3}{2}}$

184

8. a) 2 c) 8 e) 1 g) 2 i) $\frac{1}{6}$ k) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{6}$ d) 4 f) 0,5 h) 2 j) 8 l) 8

9. a) –
b) (1) 1,19581317…
(2) 0,69314484…
(3) 470,533239…
(4) 0,00781497…
(5) 1,21901365…
(6) 6,24025146…
(7) 1,31607401…
(8) 1,71743303…

10. a) $3 = 9^{\frac{1}{2}} = 27^{\frac{1}{3}} = 81^{\frac{1}{4}}$
b) $5 = 25^{\frac{1}{2}} = 125^{\frac{1}{3}} = 625^{\frac{1}{4}}$
c) $9 = 81^{\frac{1}{2}} = 729^{\frac{1}{3}} = 6\,561^{\frac{1}{4}}$
d) $4 = 16^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3}} = 256^{\frac{1}{4}}$
e) $2^3 = 4^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{3}{3}} = 16^{\frac{3}{4}}$
f) $2^6 = 4^{\frac{6}{2}} = 8^{\frac{6}{3}} = 16^{\frac{6}{4}}$
g) $3^9 = 9^{\frac{9}{2}} = 27^{\frac{9}{3}} = 81^{\frac{9}{4}}$

11. a) 4 b) 25 c) 8 d) 27 e) 32 f) 81

12. a) $(-5)^{\frac{2}{3}}$ ist nicht definiert; $\sqrt[3]{(-5)^2} = 5^{\frac{2}{3}}$
b) $\sqrt[5]{(-1)^3} = \sqrt[5]{-1}$ ist nicht definiert
c) richtig
d) $(-10\,000)^{-\frac{1}{4}}$ ist nicht definiert.

13. a) $x - 1 > 0$, also $x > 1$
b) $x + 5 > 0$, also $x > -5$
c) $2x - 1 > 0$, also $x > 0{,}5$
d) $3x + 6 > 0$, also $x > -2$
e) $1 - 4x > 0$, also $x < 0{,}25$
f) $40 - 4x > 0$, also $x < 10$

14. a) $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ c) $(x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}}$ e) $x^{-\frac{1}{4}}$
b) $(a-b)^{\frac{2}{3}}$ d) $(a \cdot b)^{\frac{3}{4}}$ f) $-7\,(a-b)^{-n}$

15. a) $\sqrt[3]{(a+1)^2}$ b) $\sqrt[9]{(x+y)^4}$ c) $\sqrt[4]{(x-7y)^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-7y)^3}}$

184 **15. d)** $\sqrt[7]{(x \cdot y)^4}$ **e)** $\sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$ **f)** $\sqrt[n \cdot q]{a^p}$

16. a) $\sqrt[4]{a^6} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$; $a > 0$

b) $\sqrt[9]{x^3} = x^{\frac{3}{9}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$; $x > 0$

c) $\sqrt[10]{z^5} = 7^{\frac{5}{10}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$; $z > 0$

d) $\frac{1}{\sqrt[12]{x^8}} = x^{-\frac{8}{12}} = x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $x > 0$

e) $\sqrt[3k]{x^k} = x^{\frac{k}{3k}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$; $x > 0$; $k \in \mathbb{N}$; $k \neq 0$

f) $\sqrt[2n]{r^{-n}} = r^{-\frac{n}{2n}} = r^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{r-1} = \frac{1}{\sqrt{r}}$; $x > 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \neq 0$

17. Nach einer Stunde steht das Wasser nur noch $\frac{1}{4}$ so hoch wie vorher.

a) $80\,\text{cm} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 80\,\text{cm} \cdot \frac{1}{16} = 5\,\text{cm}$

b) $80\,\text{cm} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 80\,\text{cm} \cdot 4 = 320\,\text{cm}$

c) $80\,\text{cm} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 80\,\text{cm} \cdot \frac{1}{2} = 40\,\text{cm}$

d) $80\,\text{cm} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 80\,\text{cm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 56{,}6\,\text{cm}$

Im Blickpunkt: Kleine Anteile – große Wirkung

185 **1.** Der Verlauf der Temperatur und der Verlauf der Konzentration des Kohlendioxids ist in der Vergangenheit sehr ähnlich. Bei geringen Temperaturen ist auch die Kohlendioxidkonzentration geringer. Der Wert der CO_2-Konzentration für das Jahr 2007 jedoch ist erheblich höher als man aufgrund der Messungen für die Vergangenheit erwarten würde. Dieser Wert war seit 160 000 Jahren nie so hoch wie heute.

2. 1 ppm $= 10^{-6}$
1 ppb $= 10^{-9}$
1 ppt $= 10^{-12}$
1 ppq $= 10^{-15}$

186 **3. a)** $2{,}7 \cdot 10^6\,\text{g} = 2{,}7\,\text{t}$
b) $2{,}7 \cdot 10^9\,\text{g} = 2\,700\,\text{t}$
c) $2{,}7 \cdot 10^{12}\,\text{g} = 2\,700\,000\,\text{t}$
d) $2{,}7 \cdot 10^{15}\,\text{g} = 2\,700\,000\,000\,\text{t}$

4. a) Chemische Verfahren: $\frac{10^{-9}\,\text{g}}{1\,000\,\text{g}} = \frac{1}{10^{12}} = 1$ ppt
Elektrochemische Verfahren: 1 ppq
Spektroskopische Verfahren: 0,1 ppq

b) 1 Liter Wasser, also 1 dm^3 Wasser, wiegt 1 kg.
Harnanteil im Wasser in g pro kg:
$\frac{5}{143\,000\,000} \approx 0{,}000000035 = 3{,}5 \cdot 10^{-8} = 35 \cdot 10^{-9} = 35\,\text{ppb}$
Laut den Angaben in Teilaufgabe a) kann dieser Anteil nachgewiesen werden.

5. In einem Liter befinden sich 10^{-5} l Ozon.

6. In einem Liter Luft sind zwischen 0,00019 l und 0,042 l Wasser enthalten.

5.3 Potenzgesetze ihre Anwendung

5.3.1 Multiplizieren und Potenzieren von Potenzen

187 **Einstieg:**

(1) $3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)\,(3 \cdot 3) = 3^7$

$3^{-5} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)} = \frac{1}{3^7} = 3^{-7}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(2) $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

$2^{-4} \cdot 3^{-4} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = \frac{1}{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)} = \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{6^4} = 6^{-4}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(3) $(3^2)^3 = (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) = 3^{2+2+2} = 3^6$

$(3^2)^{-3} = \frac{1}{(3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2)} = \frac{1}{3^{2+2+2}} = \frac{1}{3^6} = 3^{-6}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

189 **3.** $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12}$

$(3^5)^{-1} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5}$

$(4^{-2})^{-3} = \frac{1}{(4^{-2})^3} = \frac{1}{4^{-2} \cdot 4^{-2} \cdot 4^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{\frac{1}{4^6}} = 4^6$

$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(4^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(4^{\frac{3}{2}}\right) = 4^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 4^{\frac{6}{2}} = 4^3$

Allgemeine Begründung für $m,\ n \in \mathbb{N};\ m,\ n > 0$:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ Faktoren } a}}_{n \cdot m \text{ Faktoren } a} \ldots = a^{m \cdot n}$

190 **4.** Man kann nur gleichartige Glieder zusammenfassen. Das ist nur bei folgenden Teilaufgaben möglich:

d) $2a^n$ **h)** 0 **i)** $4a^n$ **j)** $6a^n$

5. **a)** **(1)** Anwendung von P1

(2) Anwendung von P2

(3) Anwendung von P3

b) **(1)** $(\sqrt{a})^5 = (\sqrt{a})^{4+1} = (\sqrt{a})^4 \cdot (\sqrt{a})^1 = a^2 \cdot \sqrt{a}$; für $a \geq 0$

(2) $(a\sqrt{b})^{-2} = a^{-2} \cdot (\sqrt{b})^{-2} = a^{-2} b^{-1}$; für $a \neq 0,\ b > 0$

(3) $(\sqrt{a})^{10} = (\sqrt{a})^2 \cdot 5 = \left((\sqrt{a})^2\right)^5 = a^5$; für $a \geq 0$

6. **a)** $2^5 = 32$

b) $3^9 = 19\,683$

c) $5^5 = 3\,125$

d) $5^{-5} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3\,125}$

e) $4^2 = 16$

f) $1^9 = 1$

190

6. **g)** $0^{15} = 1$

h) $10^2 = 100$

i) $(-1)^6 = 1$

j) $(-2)^0 = 1$

k) $(-10)^{-7} = -\frac{1}{10\,000\,000} = -0{,}0000001$

l) $0{,}2^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0{,}0016$

m) $1{,}5^2 = 2{,}25$

n) $(-0{,}5)^{-6} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} = (-2)^6 = 64$

o) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$

p) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

7. **a)** $2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$

b) $5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

c) $6^1 = 6$

d) $4^{-\frac{3}{15}+\frac{5}{15}} = 4^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{42} = \sqrt[15]{16}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{6}-\frac{4}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2 \cdot \sqrt[6]{2}$

f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

8. Nach der Schätzung sind es $(1 \cdot 10^{11}) \cdot (2 \cdot 10^{11}) = 2 \cdot 10^{22}$ Sterne.

191

9. **a)** x^5

b) $a;\ a \neq 0$

c) $z^{-7};\ z \neq 0$

d) $y^{-3};\ y \neq 0$

e) a^8

f) $b^{-6};\ b \neq 0$

g) $30\,a^6$

h) $u^{-1} \cdot v;\ u, v \neq 0$

i) $120\,z^{-1}\,y^2;\ z, y \neq 0$

j) $x^{\frac{5}{6}};\ x > 0$

k) $z^{\frac{2}{3}};\ z > 0$

l) $a^{\frac{1}{3}};\ a > 0$

10. **a)** $(x+y)^5$

b) $(x-y)^{-10}$

c) $(2\,p)^{-2}$

d) $(x \cdot y)^4$

e) $u + v$

f) $(2\,a + b)^4$

11. **a)** $x^{3n+2m};\ x > 0$

b) $p^{6a};\ p > 0$

c) $a^p;\ a > 0$

d) $y^{6r};\ y > 0$

e) $z^{6k};\ z > 0$

12. $6\,l = 6\,dm^3 = 6 \cdot 106\,mm^3$
$6 \cdot 10^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^6 = 33 \cdot 10^{12} = 3{,}3 \cdot 10^{13}$ Blutkörperchen

13. **a)** $100^3 = 1\,000\,000$

b) $10^{-6} = 0{,}000001$

c) $10^{-4} = 0{,}0001$

d) $(-2)^8 = 256$

e) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

f) $256^{\frac{1}{2}} = \sqrt{256} = 16$

g) $36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$

h) $81^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 33 = 27$

14. **a)** Falsch, richtig wäre: $2^3 + 4^3 = 8 + 64 = 72$
b) Falsch, richtig wäre: $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$ oder $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
c) Richtig
d) Falsch, richtig wäre: $4^3 - 4^{-2} = 64 - \frac{1}{16} = 63\frac{15}{16}$ oder $4^3 \cdot 4^{-2} = 4^1$
e) Falsch, richtig wäre: $(2+4)^3 = 6^3$
f) Falsch, richtig wäre: $(3-1)^2 = 2^2 = 4$

191

15. **a)** $(a\cdot b)^3$
b) $(c\cdot d)^{-2}$; $c, d \neq 0$
c) $(a\cdot b)^0 = 1$
e) $\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)^4 = 1^4 = 1$; $a \neq 0$
d) $(r\cdot s\cdot t)^{-4}$; $r, s, t \neq 0$
f) $\left(z\cdot\frac{2}{z}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{22} = \sqrt[3]{4}$; $z > 0$

16. **a)** 10^n **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ **c)** 20^{m+1} **d)** 6^{z-1} **e)** 10^{2n+1} **f)** $(a\cdot b)^{3n}$ **g)** $6^{u+\frac{2}{3}}$ **h)** $8^{r-0{,}5}$

192

17. $a^5\cdot b^5 = (a\cdot b)^5$ $\quad b^3\cdot b^5 = b^8$ $\quad a^{-4}\cdot b^5$
$a^5\cdot a^3 = a^8$ $\quad b^3\cdot a^3 = (b\cdot a)^3$ $\quad a^{-4}\cdot a^3 = a^{-1}$
$a^5\cdot b^{-4}$ $\quad b^3\cdot b^{-4} = b^{-1}$ $\quad a^{-4}\cdot b^{-4} = (a\cdot b)^{-4}$

18. **a)** $3^{-3} = \frac{1}{27}$
b) $10^5 = 100\,000$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
e) $\left(-\frac{9}{4}\right)^{-5} = \left(-\frac{4}{9}\right)^5 = -\frac{4^5}{9^5} = -\frac{1\,024}{59\,049}$
f) $\left(\frac{3}{8}\right)^7 = \frac{3^7}{8^7} = \frac{2\,187}{2\,097\,152}$

19. **a)** $2^6 = 64$ **b)** $2^{12} = 4\,096$ **c)** $2^8 = 256$ **d)** $(-3)^4 = 81$
e) $(-9)^2 = 81$ **f)** $-3^4 = -81$ **g)** $2^{12} = 4\,096$ **h)** $-2^{10} = -1\,024$
i) -2^{-10} **j)** $(-1)^7 = -1$ **k)** $-1^{35} = -1$ **l)** $(-1)^{35} = -1$

20. **a)** $5^2 = 25$
b) $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$
c) $49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{49^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$
d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{43}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$
e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{16}{81}}$

21. **a)** x^{12} **b)** a^{-6}; $a \neq 0$ **c)** z^{21}; $z \neq 0$ **d)** w^{10}; $w \neq 0$ **e)** $(-x)^{12} = x^{12}$
f) $(-x)^{12} = x^{12}$ **g)** $-x^{12}$ **h)** $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5}$; $x > 0$ **i)** $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$; $x > 0$ **j)** $y^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{y^9}$; $y > 0$
k) a^4; $a > 0$ **l)** $b^{-1} = \frac{1}{b}$; $b > 0$ **m)** $d^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{d}$; $d > 0$ **n)** $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $e > 0$ **o)** $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a > 0$

22. **a)** $2^{12} = 4\,096$ **b)** $-2^{10} = -1\,024$ **c)** $-2^{10} = -1\,024$ **d)** $-1^{35} = -1$
e) $-1^{35} = -1$ **f)** $(-1)^{35} = -1$ **g)** $2^8 = 256$ **h)** $(-1)^{-80} = 1$
i) $(-1)^{-24} = 1$ **j)** $(-1)^6 = 1$

23. **(1)** Falsch, Gegenbeispiel $2^1 \neq 1^2$
(2) Richtig, denn $(a^m)^n = a^{m\cdot n} = a^{n\cdot m} = (a^n)^m$
(3) Richtig, denn $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

24. **a)** $2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10} \approx 1\,000\cdot 1\,000\cdot 1\,000 = 1\,000\,000\,000$

192

24. b) $2^{10} \cdot 2 \approx 1\,000 \cdot 2 = 2\,000$
c) $2^{10} \cdot 2^9 \approx 1\,000 \cdot 512 = 512\,000$
d) $2^{10} \cdot 2^4 \approx 1\,000 \cdot 16 = 16\,000$
e) $5^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \approx 625 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 625\,000\,000$

25. a) $3^4 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4 = 3^4 \cdot 5^2$
b) $\left(\sqrt{3}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4 = 3^2 \cdot 5^2$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{-2}$
d) $x^{-2} \cdot y^{-2}$
e) $3^4 \cdot x^4$
f) $6^3 \cdot x^3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 = 6^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x^3$
g) $(-4)^{-2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = (-4)^{-2} \cdot 2^{-1}$
h) $\left(\sqrt{6}\right)^{-2} \cdot \left(\sqrt{8}\right)^{-2} = 6^{-1} \cdot 8^{-1}$
i) $a^{-2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = a^{-2} \cdot 2^{-1}$
j) $x^4 \cdot y^4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 = x^4 \cdot y^4 \cdot 2^2$
k) $e^4 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4 = e^4 \cdot 5^2$
l) $y^3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 = y^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$

193

26. a) $2^2 = 4$
b) $5^4 = 625$
c) $7^5 = 16\,807$
d) $10^6 = 1\,000\,000$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
f) $3^3 = 27$
g) $-5^4 = -625$
h) $-3^2 = -9$

27. a) 6^{10}
b) 5^{10}
c) 10^{12}
d) 10^{16}
e) 2^{16}
f) 3^{12}
g) 2^{30}
h) 2^{50}

28. a) $3x^2 + 3x^3 = 3x^2(1 + x)$
b) $6z^4 - 4z^7 = 2z^4(3 - 2z^3)$
c) $2u^m$
d) $c^2(2 + 3c + 4c^2)$

29. a) $x^{10} - x^9$
b) $a^8 - a^6 - a^4$
c) $x^2 - x^3$
d) $a^2 - a^{-6} - a^{-2}$
e) $5a^9b^2v^{-2} - 10a^3b^7v^{-2}$
f) $5x^3y^3 - 5x^4y^2$

30. a) $12r^7 + 20r^3t^6 - 21s^3r^4 - 35s^3t^6 + 3tr^4 + 5t^7$
b) $2a + 2a^{-1}b^4 + 3b^{-4}a^2 + 3$
c) $5 - 5x^{-4}y^2 - 3y^{-3}x^4 + 3y^{-1}$
d) $9a^{-1} - 9a^2b^2 + 2b^{-5}a^{-3} - 2b^{-3}$

31. a) $a \cdot (a^2 + a^3 + 1)$
b) $x \cdot (x^4 - x + 1)$
c) $4x^3 \cdot (x - 3)$
d) $3y^2 \cdot (5y^3 - 14)$
e) $ab \cdot (ab^2 + b - a^4)$

32. a) Falsch, richtig wäre: $p^4 + p^7 + p^2 = p^2(p^2 + p^5 + 1)$
b) Falsch, richtig wäre: $2x^4 + 6x^6 = 2x^2(x^2 + 3x^4)$ oder: $2x^4 + 6x^6 = 2x^4(1 + 3x^2)$
c) Falsch, richtig wäre: $4x^2y^3 + 2x^3y^2 = 2x^2y^2(2y + x)$
d) Falsch, richtig wäre: $8a^2b^3 - 4a^3b^3 = 4a^2b^2(2b - ab)$

33. –

34. a) $b^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{b}}$
b) $(-1)^6 = 1$
c) $(-1)^3 = -1$
d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$
e) z^{10}
f) $(-x)^{12}$
g) $6x^0 = 6$
h) b^{-2}
i) $\frac{a^{-2}}{2}$

193 **34. j)** 1 **k)** $-x^{12}$ **l)** x^{12} **m)** $x^{12} - x^{12} = 0$ **n)** $81\,x^4 - 27\,x^4 = 54\,x^4$ **o)** $a^{-6} - a^{-6} = 0$ **p)** $a^4 \cdot 4 - 8\,a^4 = -4\,a^4$

35. a) x^{-n} **b)** x^{m-n} **c)** $a^{-n \cdot m - m}$ **d)** $x^{n \cdot k}$ **e)** x **f)** y^{-3n}

194 **36. a)** $a^6 \cdot b^{10}$ **b)** $x^{-12} \cdot z^{18}$ **c)** $r^9 \cdot s^{27}$ **d)** $x^{12} \cdot y^{-8} \cdot z^4$ **e)** $a^{2n} \cdot b^{4n}$ **f)** $a^{3n} \cdot b^{4n} \cdot c^{2n}$ **g)** $x^{5n+5} \cdot y^{2n+2}$ **h)** $x^{8n-12} \cdot y^{-4n+6}$

37. a) $(x+y)^5$ **b)** $(a-b)^{-10}$ **c)** $a^6 \cdot b^{10}$ **d)** $x^{-15} \cdot y^{10}$ **e)** $(2\,p)^{-2}$ **f)** $(x \cdot y)^4$

38. a) $5^{\frac{5}{6}}$ **b)** $7^{\frac{8}{15}}$ **c)** $x^{\frac{5}{6}}$; $x > 0$ **d)** $2^{-\frac{5}{6}}$ **e)** $x^{\frac{11}{15}}$; $x > 0$

39. $a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = (a \cdot b)^{\frac{3}{4}}$ $\quad b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = b$ $\quad a^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$

$a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = (a^3 \cdot b)^{\frac{1}{4}}$ $\quad b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{2}}$ $\quad a^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$

$a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{5}}\, b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{5}} = b^{\frac{1}{20}}$ $\quad a^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{-\frac{1}{5}} = (a \cdot b)^{-\frac{1}{5}}$

40. a) $y^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{y^5}$; $y > 0$ **b)** $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$; $a > 0$ **c)** $b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2}$; $b > 0$ **d)** $c^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$; $c > 0$ **e)** $d^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{d^5}$; $d > 0$ **f)** $b^0 = 1$; $b > 0$ **g)** $c^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c}$; $c > 0$ **h)** a^3; $a > 0$

41. a) $a^{0{,}72} = a^{\frac{18}{25}} = \sqrt[25]{a^{18}}$; $a > 0$
b) $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$; $b > 0$
c) $r^{2{,}1} \cdot s^{-3{,}5} = r^{\frac{21}{10}} \cdot s^{-\frac{7}{2}} = \sqrt[10]{r^{21}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{s^7}}$; $r, s > 0$
d) $x^1 = x$; $x > 0$
e) $a^1 = a$; $a > 0$

42. a) $3^{\frac{m+n}{m \cdot n}}$ **b)** $2^{\frac{2n-1}{n^2-n}}$ **c)** $80 = 1$ **d)** $7^{\frac{m}{n-1}} \cdot 7^{\frac{m}{n+1}} = 7^{\frac{2\,mn}{n^2-1}}$ **e)** $p^{\frac{2m}{n}}$

43. a) Hier wurden die Exponenten multipliziert, statt addiert.
$y^{\frac{2}{3}+3} = a^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{a^{11}}$ (P1); $a > 0$

b) Hier wurden die Exponenten falsch addiert:
$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \neq \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6}$, richtig ist $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$.
$y^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{y^4}$ (P1*); $y > 0$

c) Hier wurde der Exponent quadriert, statt mit dem anderen multipliziert.
$c^{\frac{5}{3} \cdot 2} = c^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{c^{10}}$ (P3); $c > 0$

d) Hier wurde (P1) angewendet, obwohl es eine Summe von Potenzen ist. Es kann kein Potenzgesetz angewandt werden, um die Summanden zusammenzufassen.

194

44. $\sqrt{a}$ muss im linken Mauerstein in der zweiten Zeile von unten stehen.
In der Mauer zu Teilaufgabe b) muss $\sqrt{y}$ einen Mauerstein nach links.

a)

a^3			
a^2	a		
$\sqrt{a}$	$a^{\frac{3}{2}}$	$a^{-\frac{1}{2}}$	
$a^{\frac{1}{2}}$	1	$a^{\frac{3}{2}}$	a^{-2}

b)

$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$			
$\sqrt{y}$	$y^{\frac{2}{3}}$		
$x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}$	$(xy)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$	
$x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}$	$y^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{x}$	$y^{-\frac{1}{3}}$

c)

$c^{m+\frac{1}{3}}$			
$c^{-\frac{n}{2}}$	$c^{m+\frac{n}{2}+\frac{1}{3}}$		
c^{-m-n}	$c^{m+\frac{n}{2}}$	$\sqrt[3]{c}$	
c^{-2m-n}	c^m	$(\sqrt{c})^n$	$\frac{\sqrt[3]{c}}{(\sqrt{c})^n}$

Das kann ich noch!

A) Druckfehler in der ersten Auflage in Teilaufgabe 1): $c = 2{,}5\,\text{cm}$
Falls es einen rechten Winkel gibt, so liegt er immer der längsten Seite gegenüber. Wir prüfen mit dem Kehrsatz des Satzes des Pythagoras, ob der Winkel ein rechter ist.

1) $(2{,}5\,\text{cm})^2 = 6{,}25\,\text{cm}^2$ und $(1{,}5\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2 = 6{,}25\,\text{cm}^2$, also $c^2 = a^2 + b^2$, das Dreieck hat beim Eckpunkt C einen rechten Winkel.

2) $(6\,\text{cm})^2 = 36\,\text{cm}^2$ und $(3\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2 = 25\,\text{cm}^2$, also $c^2 > a^2 + b^2$, das Dreieck hat beim Eckpunkt C einen stumpfen Winkel.

3) $(9\,\text{cm})^2 = 81\,\text{cm}^2$ und $(8\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm})^2 = 100\,\text{cm}^2$, also $c^2 < a^2 + b^2$, das Dreieck ist ein spitzwinkliges Dreieck.

4) $(7{,}5\,\text{cm})^2 = 56{,}25\,\text{cm}^2$ und $(6\,\text{cm})^2 + (4{,}5\,\text{cm})^2 = 56{,}25\,\text{cm}^2$, also $a^2 = b^2 + c^2$, das Dreieck hat beim Eckpunkt A einen rechten Winkel.

5.3.2 Dividieren von Potenzen

196

1. **a)** $7^1 = 7$
b) $5^{-2} = \frac{1}{25}$
c) $2^1 = 2$
d) $10^1 = 10$
e) $0{,}5^2 = 0{,}25$
f) $1{,}2^{-1} = \frac{1}{1{,}2}$
g) $7^3 = 343$
h) $2^{-6} = \frac{1}{64}$
i) $(-3)^2 = 9$
j) $(-5)^2 = 25$
k) $10^0 = 1$
l) $5^2 = 25$

196

2. a) $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$
b) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$
c) $6^{-1} = \frac{1}{6}$
d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$
e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{11}{30}} = \sqrt[30]{\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}$
f) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{19}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{6^{19}}}$

3. $\frac{2^{22}}{2^1} = 2^{22-1} = 2^{21}$

4. a) 2^5
b) 5^4
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 2^{10}$
d) 2^5
e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4$
f) $4^{-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$
g) $3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$
h) 2^9
i) 4^6
j) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$
k) $(-1)^{20} = 1$
l) 3^{-3}
m) $\left(-\frac{1}{36}\right)^{-4} = (-36)^4$
n) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-3} = \left(\frac{16}{9}\right)^3$
o) $\left(-\frac{20}{9}\right)^3$

5. a) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
b) $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$
c) $64^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{64}} = \frac{1}{2}$
d) $40{,}5 = \sqrt{4} = 2$
e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1{,}5} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{9^3}\right)} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
f) $4^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

6. a) $a^6;\ a \neq 0$
b) $x^{-9};\ x \neq 0$
c) $c^{-2};\ c \neq 0$
d) $c^2;\ c \neq 0$
e) $y^{-3};\ y \neq 0$
f) $z^{-2};\ z \neq 0$
g) $b^{-2};\ b \neq 0$
h) $(a \cdot b)^2;\ a,\ b \neq 0$
i) $(a \cdot b)^2;\ a,\ b \neq 0$
j) $\left(a \cdot \sqrt{2}\right)^{-1};\ a \neq 0$
k) $(x + y)^{-5};\ x + y \neq 0$
l) $\left(x + \sqrt{5}\right)^8;\ x \neq -\sqrt{5}$

5.3.3 Vermischte Übungen zu den Potenzgesetzen – Wurzelgesetze

197

1. a) **(P2):**

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

(P2*):

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(P3):

$(a^r)s = ar \cdot s$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

b) (1) $\sqrt[3]{8} = 2$
(2) $\sqrt[5]{32} = 2$
(3) $\sqrt[12]{2^{12}} = 2$

2. a) u^{-1}
b) r^6
c) $(v \cdot w)^3$
d) x^2
e) $\left(\frac{r}{s}\right)^{-3}$
f) $x^1 = x$
g) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{-2}$
h) $(u - u - 1)^2$
i) c^{-6n}
j) z^{3n}
k) w^{2n-1}
l) $(a \cdot b)^{2n-1}$

3. a) $\left(\frac{u}{v}\right)^4;\ v \neq 0$
b) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2};\ x, y \neq 0$
c) $\left(\frac{p}{q}\right)^3;\ q \neq 0$
d) $\left(\frac{w}{a}\right)^{-4};\ w, a \neq 0$
e) $\left(\frac{a+b}{c}\right)^2;\ c \neq 0$
f) $\left(\frac{u-1}{v}\right)^{-2};\ u \neq 1, v \neq 0$

197

4.
- **a)** a^8; $a \neq 0$
- **b)** b^{-8}; $b \neq 0$
- **c)** $\left(\frac{c}{d}\right)^{-5}$; $c, d \neq 0$
- **d)** x^{-4}; $x \neq 0$
- **e)** y^3; $y \neq 0$
- **f)** $\left(\frac{a}{u}\right)^5$; $u \neq 0$
- **g)** a^{-2}; $a \neq 0$
- **h)** 1; $x \neq 0$
- **i)** 1; $a \neq 0$
- **j)** 1; $a \neq 0$
- **k)** $\left(\frac{z}{y}\right)^{-3}$; $z, y \neq 0$
- **l)** $\left(\frac{x}{z}\right)^5$; $z \neq 0$
- **m)** 1; $b \neq 0$
- **n)** y^{-n}; $y \neq 0$
- **o)** z^n; $a \neq 0$
- **p)** $\left(\frac{u}{x}\right)^m$; $x \neq 0$
- **q)** $a^1 = a$
- **r)** x^{-n}

5.
$\frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$ $\quad$ $\frac{b^4}{b^5} = b^{-1}$ $\quad$ $\frac{a^{-3}}{b^5} = a^{-3}b^{-5}$

$\frac{a^5}{a^4} = a$ $\quad$ $\frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{b}{a}\right)^4$ $\quad$ $\frac{a^{-3}}{a^4} = a^{-7}$

$\frac{a^5}{b^{-3}} = a^5 b^3$ $\quad$ $\frac{b^4}{b^{-3}} = b^7$ $\quad$ $\frac{a^{-3}}{b^{-3}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

6.
a) $\frac{(\sqrt{5})^3}{3^3} = (\sqrt{5})^3 \cdot 3^{-3} = (\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3^{-3} = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 3^{-3} = \frac{5}{27}\sqrt{5}$

b) $\frac{(\sqrt{3})^5}{(-2)^5} = (\sqrt{3})^5 \cdot (-2)^{-5} = (\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-2)^{-5} = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot (-2)^{-5} = -\frac{9}{32}\sqrt{3}$

c) $\frac{(-4)^{-2}}{(\sqrt{2})^{-2}} = (-4)^{-2} \cdot (\sqrt{2})^2 = 16^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{5})^4} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

e) $\frac{(x \cdot \sqrt{2})^2}{(y \cdot \sqrt{3})^2} = \frac{x^2 \cdot (\sqrt{2})^2}{y^2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{2x^2}{3y^2}$

f) $\frac{(x \cdot \sqrt{2})^{-4}}{(y \cdot \sqrt{5})^{-4}} = (x \cdot \sqrt{2})^{-4} \cdot (y \cdot \sqrt{5})^4 = x^{-4} \cdot (\sqrt{2})^{-4} \cdot y^4 \cdot (\sqrt{5})^4 = x^{-4} \cdot 2^{-2} \cdot y^4 \cdot 5^2$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 x^{-4} y^4 = \frac{25y^2}{4x^2}$

7.
(1) Die Potenzgesetze können nicht angewendet werden.
$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$

(2) Verrechnet. $9 \cdot 16 = 144$

(3) Die Potenzgesetze können nicht angewendet werden.
$(3 - 4)^2 = (-1)^2 = 1$

(4) Richtig.

198

8. **a)**

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">216</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$12a$</td><td colspan="2">$18a^{-1}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$2a$</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">$3a^{-1}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">a^2</td><td colspan="2">$2a^{-1}$</td><td colspan="2">$3a$</td><td colspan="2">a^{-2}</td></tr>
</table>

198

8. **b)**

			$8x^{-9}y^{-2}$				
		$4x^{-5}y^{-2}$		$2x^{-4}$			
	$4x^{-1}y^{-1}$		$x^{-4}y^{-1}$		$2y$		
$4xy$		$x^{-2}y^{-2}$		$x^{-2}y$		$2x^2$	

9. $9^{\frac{1}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 3^{2\cdot\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$

$125^{\frac{1}{12}} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{3\cdot\frac{1}{12}} = 5^{\frac{1}{4}}$

$32^{\frac{3}{10}} = (2^5)^{\frac{3}{10}} = 2^{5\cdot\frac{3}{10}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 + \frac{1}{2} = 2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\sqrt{2}$

$\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}\cdot(3^2) - \frac{1}{6} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}-1} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-1} = \frac{3^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2}}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. **a)** $(a\cdot b)^4$
b) $x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}} = (x\cdot y)^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}} = \sqrt{x\cdot y}\cdot\sqrt[4]{y}$
c) $(4\cdot 9)^2 = 36^2 = 1\,296$
d) $(a\cdot b)^7$
e) $(a\cdot b)^{24}$
f) $\left(\sqrt{2}\cdot a\right)^2 = 2a^2$
g) $a^{-40}\cdot b^{40}\cdot c^{-40} = (a^{-1}\cdot b\cdot c^{-1})^{40}$
h) $(x\cdot y^2\cdot z)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\cdot y\cdot z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\cdot y\cdot\sqrt{z}$

11. **a)** x^2y^{-3}
b) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3}$
c) $a^{12}\cdot b^{15}$
d) $x^{16}\cdot y^{-14} = \frac{x^{16}}{y^{14}}$
e) $a^{-\frac{2}{n}}\cdot b^2\cdot c$

12. $V_{klein} = a^3$; $A_{groß} = 4a^2$; $h = a^3 : 4a^2 = \frac{1}{4}a$

13. $1\,g : (4\cdot 10^{-23}\,g) = 2{,}5\cdot 10^{24}$
1 g Uran enthält $2{,}5\cdot 10^{24}$ Atome.
Für den Überschlag nehmen wir an, dass ein Uranatom die Form eines Würfels hat.
$10^{-10}\,m = 10^{-8}\,cm$
Ein Würfel mit 1 cm Kantenlänge enthält also $(10^8)^3 = 10^{24}$ Uranatome.
Er wiegt dann $10^{24}\cdot 4\cdot 10^{-23}\,g = 40\,g$.
So ein Würfel wäre ungefähr 40 g schwer.

14. Die Potenzgesetze kann man immer anwenden, während die Wurzelgesetze nur für die Spezialfälle sinnvoll angewendet werden können.

15. **a)** $\sqrt{81} = 9$
b) $\sqrt[3]{8} = 2$
c) $\sqrt[3]{125} = 5$
d) $\sqrt[4]{81} = 3$
e) $\sqrt[5]{32} = 2$
f) $\sqrt[3]{27} = 3$

16. **a)** $2^{-\frac{1}{6}}$
b) 1
c) $2^{-\frac{1}{8}}$
d) $b^{\frac{1}{6}}$; $b > 0$
e) $z^{\frac{1}{4}}$; $z > 0$
f) $a^{\frac{1}{6}}$; $a > 0$

198 **17. a)** $\sqrt{9} = 3$ **b)** $\sqrt{9} = 3$ **c)** $\sqrt[3]{27} = 3$ **d)** $\sqrt[3]{125} = 5$ **e)** $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ **f)** $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

18. a) $\sqrt{4} = 2$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{144}} = \sqrt[3]{12}$ **c)** $\sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{49}} = \sqrt[3]{7}$ **e)** $\sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$

Im Blickpunkt: Stimmung einer Tonleiter

199 **1. a)** $c \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} d \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} e \xrightarrow{\cdot\frac{256}{243}} f \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} g \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} a \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} h \xrightarrow{\cdot\frac{256}{243}} c'$

Bei einem Ganztonschritt wird die Frequenz mit $\frac{9}{8}$ vervielfacht, bei einem Halbtonschritt mit $\frac{256}{243}$.

b) Für die nicht in der Tonleiter enthaltenen Halbtonschritte müsste gelten

$\xrightarrow{\quad\cdot\frac{9}{8}\quad}$

$\xrightarrow[\cdot h]{} \xrightarrow[\cdot h]{}$, also $h^2 = \frac{9}{8}$, also $h = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \neq \frac{256}{243}$.

Näherungswerte sind $\frac{256}{243} = 1{,}054\ldots$ und $\frac{3}{2\sqrt{2}} = 1{,}060\ldots$

2. a) $h^{12} = 2$, also $h\sqrt[12]{2} = 1{,}059\ldots$

b)

Ton	c	d	e	f	g	a	b	c′
ν_{Pyth} (in Hz)	260,7	293,3	330	347,7	391,1	440	495	521,5
ν_{Wohl} (in Hz)	261,6	293,7	329,6	349,2	392,0	440	493,9	523,3

3. Die reine Stimmung hat ausgehend von der Frequenz ν des Grundtones c folgende Frequenzen.

Ton	c	d	e	f	g	a	b	c′
Frequenz	ν	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{5}{4}\nu$	$\frac{4}{3}\nu$	$\frac{3}{2}\nu$	$\frac{5}{3}\nu$	$\frac{15}{8}\nu$	2ν

5.4 Potenzfunktionen

5.4.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

200 **Einstieg:**
Die Graphen für gerade Exponenten sind symmetrisch zur y-Achse, die für ungerade sind symmetrisch zum Ursprung. Je größer der Exponent ist, desto steiler verläuft der Graph. Alle Graphen haben die gemeinsamen Punkte $O(0|0)$ und $P(1|1)$.

201 **2. a)** Siehe Information (2) im Schülerband auf Seite 202.

201 **2.** **b)** $y = x^3$ x-Wert ver-k-facht: y-Wert ver-k_3-facht
$y = x^4$ x-Wert ver-k-facht: y-Wert ver-k_4-facht
$y = x^n$ x-Wert ver-k-facht: y-Wert ver-k_n-facht
Siehe Information (4) im Schülerband auf Seite 202.

203 **3.** **a)**

x	x^3	x^4
0,8	0,512	0,410
−0,8	−0,512	0,410
1,3	2,197	2,856
−1,3	−2,197	2,856

b) **(1)** Wert 2 bei ≈ 1,26 [≈ 1,19]
(2) Wert 3 bei ≈ 1,44 [≈ 1,32]

4. Annes Graph ist falsch. Der Graph der Potenzfunktion ist eine Kurve und besteht nicht aus Geraden und Ecken. Beas Graph ist richtig.

5.

x	**(1)** x^4	**(2)** x^5	**(3)** x^6
3	81	243	729
−2	16	−32	64
0,8	0,4096	0,32768	0,262144
−1,5	5,0625	−7,5938	11,39063
$-\frac{3}{2}$	5,0625	−7,5938	11,39063
$\sqrt{2}$	4	5,65685	8

6. **a)** $P_2, P_6, P_7, P_{10}, P_{12}$ **b)** P_1, P_7, P_9, P_{12}

204 **7.** **a)** $P_1(4|64)$, $P_2(3|27)$, $P_3(-3|-27)$, $P_4(0{,}5|0{,}125)$, $P_5(-0{,}5|-0{,}125)$
b) $P_1(-2|16)$, $P_2(0{,}2|0{,}0016)$, $P_3(-0{,}2|-0{,}0016)$, $P_4(0|0)$,
Für P_5 gibt es zwei Möglichkeiten: $P_5(-3|81)$ oder $P_5(3|81)$.

8. **a)** 2,0736
8,3521
b) −0,59049
−3,71293
c) 0,015625
1,771561
d) −0,7
−1,2

9. $y = x^2$: schwarzer Graph $y = x^3$: roter Graph $y = x^4$: blauer Graph

5.4.2 Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Einstieg:
Siehe Information (2) auf Seite 206 des Schülerbandes.

206 **2. a)** Die Graphen für gerade Exponenten sind symmetrisch zur y-Achse, die für die ungeraden sind symmetrisch zum Ursprung. Je größer der Betrag des Exponenten, desto steiler verläuft der Graph. Alle Graphen haben den gemeinsamen Punkt $P(1\,|\,1)$. Die Funktionen sind für $x = 0$ nicht definiert. Die Graphen bestehen aus zwei Teilen. Der Graph schmiegt sich den Koordinatenachsen an (siehe auch Information (2) auf Seite 206).

b) $y = x - 1$: Der Funktionswert ändert sich um den Faktor $\frac{1}{2}$ $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$.

$y = x - 2$: Der Funktionswert ändert sich um den Faktor $\frac{1}{4}$ $\left[\frac{1}{9}; 4\right]$

$y = x - 3$: Der Funktionswert ändert sich um den Faktor $\frac{1}{8}$ $\left[\frac{1}{27}; 8\right]$.

207 **3. a)**

	abgelesen		berechnet	
x	x^{-1}	x^{-2}	x^{-1}	x^{-2}
0,8	1,2	1,6	1,25	1,56
−0,8	−1,2	1,6	−1,25	1,56
1,3	0,8	0,6	0,77	0,59
−1,3	−0,8	0,6	−0,77	0,59

b)

	Stelle (abgelesen)	Stelle (berechnet)
Wert 2	0,5 [±0,7]	0,5 $\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$
Wert $\frac{1}{4}$	4 [±2]	4 [±2]

4. Der Graph von Moritz ist falsch. Der Graph der Potenzfunktion $y = x^{-3}$ besteht aus 2 Kurven. Die Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert. Insbesondere die Verbindungslinie durch $O(0\,|\,0)$ muss weggelassen werden. Die Punkte dürfen nicht geradlinig verbunden werden.

5. a) $P_1\left(2\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,4\right)$, $P_3\left(4\,\middle|\,\frac{1}{16}\right)$ und $P_3'\left(-4\,\middle|\,\frac{1}{16}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,9\right)$ und $P_4'\left(-\frac{1}{3}\,\middle|\,9\right)$

b) $P_1(1{,}5\,|\,0{,}296)$, $P_2\left(-\frac{1}{3}\,\middle|\,-27\right)$, $P_3\left(-3\,\middle|\,-\frac{1}{27}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{4}\,\middle|\,64\right)$

6. a)

x	x^{-1}
2,5	0,4
−0,8	−1,25
−2,5	−0,4
0,8	1,25

b)

x	x^{-2}
0,25	16
1,25	0,64
−0,25	16
−1,25	0,64

c)

x	x^{-3}
0,1	1000
1,25	0,512
−0,1	−1000
−1,25	−0,512

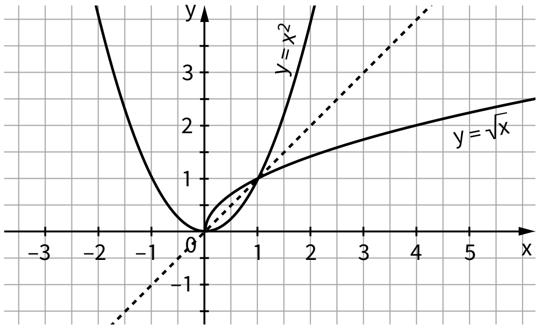
5.4.3 Potenzfunktionen mit gebrochenrationalen Exponenten

208 **Einstieg:**

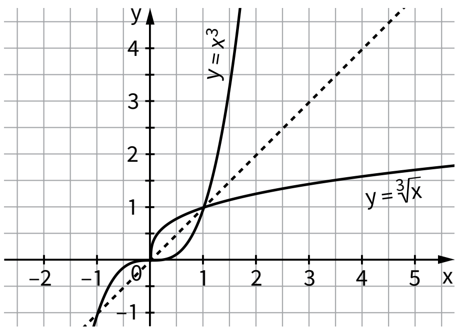
Graphen siehe Lösung zu Aufgabe 1 b) im Schülerband auf Seite 208.

Der Graph zu $y = x^{\frac{1}{2}}$ steigt schneller als der Graph zu $y = x^{\frac{1}{3}}$. Beide Graphen steigen im ersten Quadranten an. Sie haben beide die gemeinsamen Punkte P(0|0) und Q(1|1).

209 **3. a)** Der Graph von $y = x^{\frac{1}{2}}$ entspricht dem an $y = x$ gespiegelten Graphen von $y = x^2$.
Somit ist $y = x^{\frac{1}{2}}$ die Umkehrfunktion zu $y = x^2$.



b) Der Graph von $y = x^{\frac{1}{3}}$ entspricht dem an $y = x$ gespiegelten Graph von $y = x^3$.
Somit ist $y = x^{\frac{1}{3}}$ die Umkehrfunktion zu $y = x^3$.



4. **(1)** – (b); **(2)** – (f); **(3)** – (d); **(4)** – (a); **(5)** – (e); **(6)** – (c)

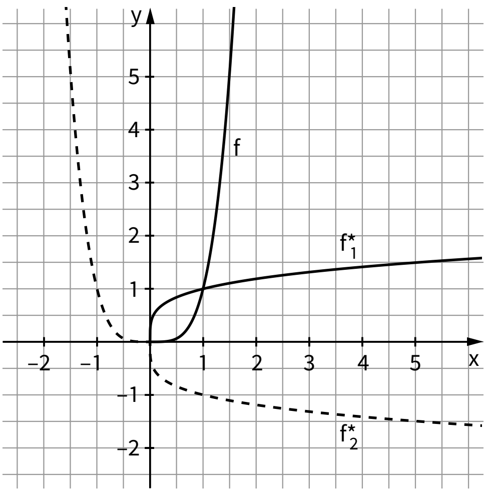
5.5 Wurzelfunktionen – Umkehrfunktionen

210 **Einstieg:**
Graphen siehe Information auf Seite 210 des Schülerbandes
Der zu $y = \sqrt{x}$ steigt schneller als der Graph zu $y = \sqrt[3]{x}$.
Beide Graphen steigen im gesamten ersten Quadranten an.

2. Die Funktion ist umkehrbar über den positiven reellen Zahlen, da für alle positiven reellen Zahlen die dritte Wurzel eindeutig definiert ist. Zu $y = x^3$ lautet die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $y = \sqrt[3]{x}$. Auch die Funktion $y = x^n$ ist umkehrbar über den positiven reellen Zahlen, da für alle positiven reellen Zahlen auch die n-te Wuzel eindeutig definiert ist. Zu $y = x^n$ lautet die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $y = \sqrt[n]{x}$.

3. **(1)** P_2, P_5 **(2)** P_1, P_5, P_6

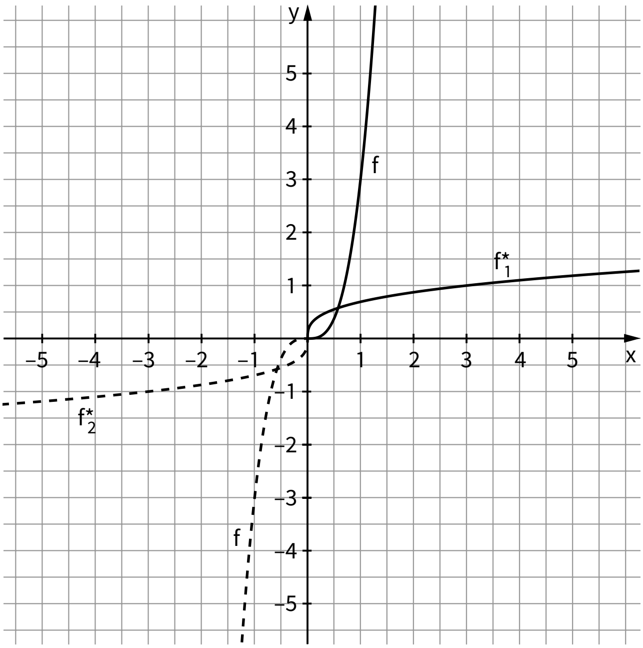
4. **a)** Funktion: $f(x) = x^4$
Umkehrfunktionen: $f_1^*(x) = \sqrt[4]{x}$ für $x \geq 0$ $f_2^*(x) = -\sqrt[4]{|x|}$ für $x \leq 0$



210

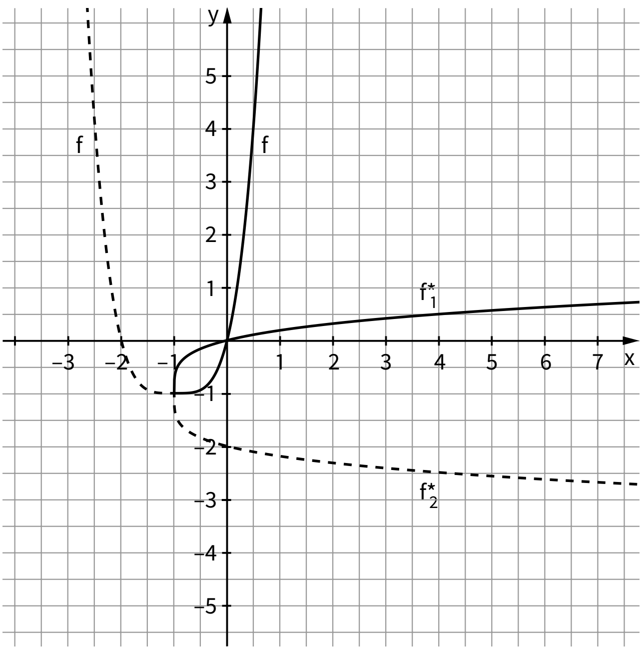
4. b) Funktion: $f(x) = 3 \cdot x^3$

Umkehrfunktionen: $f_1^*(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$ für $x \geq 0$ $\quad f_2^*(x) = -\sqrt[3]{\frac{|x|}{3}}$ für $x \leq 0$



c) Funktion: $f(x) = (x+1)^4 - 1$

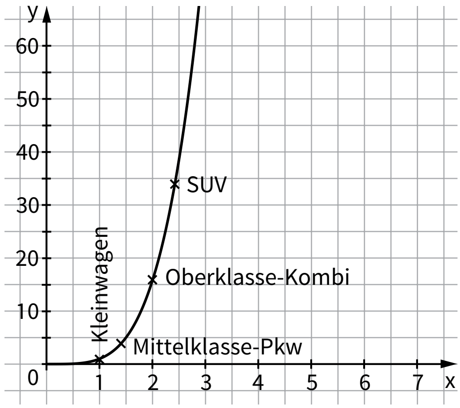
Umkehrfunktionen: $f_1^*(x) = \sqrt[4]{x+1} - 1$ für $x \geq 0$ $\quad f_2^*(x) = -\sqrt[4]{|x|+1} - 1$ für $x \leq 0$



Im Blickpunkt: Straßenabnutzung – Vierte-Potenz-Regel

211

1. Es lastet jeweils eine Masse von 0,5 t, 0,7 t, 1 t und 1,2 t auf einer Achse.



2. Der zweiachsige 3,5-Tonner drückt je Achse 1,75 t auf die Straße, also mit dem 3,5-fachen der Achslast des Pkw. Die Straßenabnutzung pro Achse ist dann aber $3{,}5^4 \approx 150$ Mal so groß. Also stimmt die erste Angabe.
Der vierachsige 30-Tonner drückt je Achse mit 7,5 t auf die Straße, also mit dem 15-fachen der Achslast des Pkw. Die Straßenabnutzung pro Achse ist dann aber $15^4 \approx 50\,625$ Mal so groß. Da der vierachsige Lkw zwei Mal so viele Achsen hat, ist die Gesamtabnutzung um den Faktor 101 250 höher.
Die gerundete Angabe von 100 000 Pkw lässt sich also durch die genaue Anzahl von sogar 101 250 ersetzen.

3. 3 Achsen: 98 304 Mal so groß wie beim Pkw
4 Achsen: 41 472 Mal so groß wie beim Pkw
5 Achsen: 21 234 Mal so groß wie beim Pkw
6 Achsen: 12 288 Mal so groß wie beim Pkw
Durch eine Achse wird die Straßenabnutzung etwa halbiert.

5.6 Verschieben und Strecken der Graphen der Potenzfunktionen

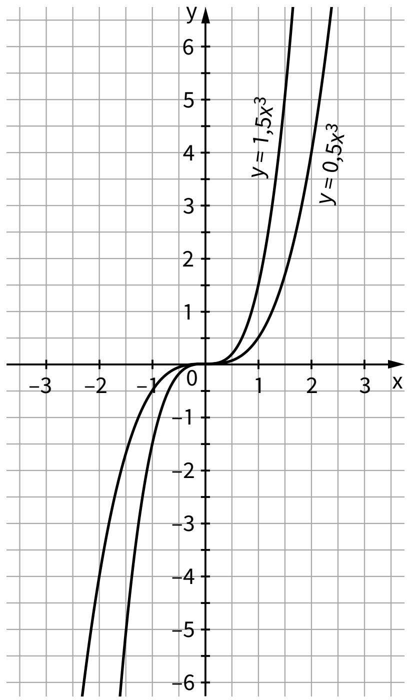
214

1. a)
(1) $y = (x-2)^2$ $\quad [y = (x+2)^2]$
(2) $y = (x-6)^2$ $\quad [y = (x+6)^2]$
(3) $y = \left(x - 3\frac{1}{4}\right)^2$ $\quad \left[y = \left(x + 3\frac{1}{4}\right)^2\right]$
(4) $y = (x-1{,}5)^2$ $\quad [y = (x+1{,}5)^2]$

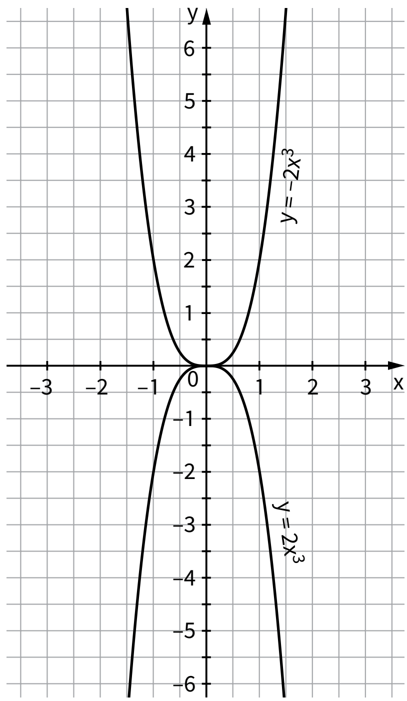
b)
(1) $y = (x-2)^3$ $\quad [y = (x+2)^3]$
(2) $y = (x-6)^3$ $\quad [y = (x+6)^3]$
(3) $y = \left(x - 3\frac{1}{4}\right)^3$ $\quad \left[y = \left(x + 3\frac{1}{4}\right)^3\right]$
(4) $y = (x-1{,}5)^3$ $\quad [y = (x+1{,}5)^3]$

214

2. a) Beide Funktionsgraphen steigen für alle x aus den reellen Zahlen monoton. Der Betrag der Steigung ist für die Funktion $y = 1{,}5\,x^3$ in jedem Punkt, außer im Ursprung, um den Faktor 3 größer als der Betrag der Steigung von $y = 0{,}5\,x^3$. Außerdem sind beide Graphen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

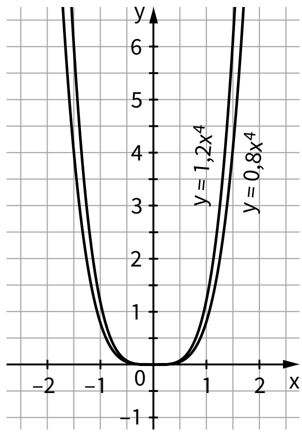


b) Der Funktionsgraph zu $y = 2\,x^3$ steigt für alle x aus den reellen Zahlen monoton. Da $y = -2\,x^3$ durch eine Spiegelung des Graphen zu $y = 2\,x^3$ an der x-Achse hervorgeht, fällt dieser Graph für alle x aus den reellen Zahlen monoton. Der Betrag der Steigung ist für die Funktion $y = 2\,x^3$ in jedem Punkt gleich dem Betrag der Steigung von $y = -2\,x^3$. Die Steigungswerte unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen. Außerdem sind beide Graphen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

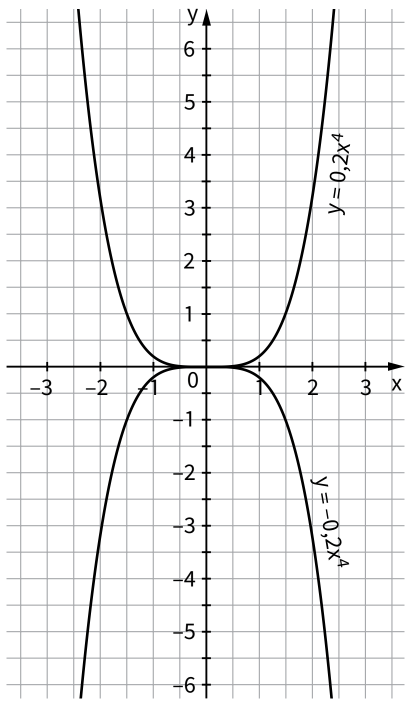


214

2. c) Beide Funktionsgraphen fallen für alle negativen x aus den reellen Zahlen und steigen für alle positiven x aus den reellen Zahlen. Der Betrag der Steigung ist für die Funktion $y = 1{,}2\,x^4$ in jedem Punkt, außer im Ursprung, größer als der Betrag der Steigung von $y = 0{,}8\,x^4$. Beide Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.

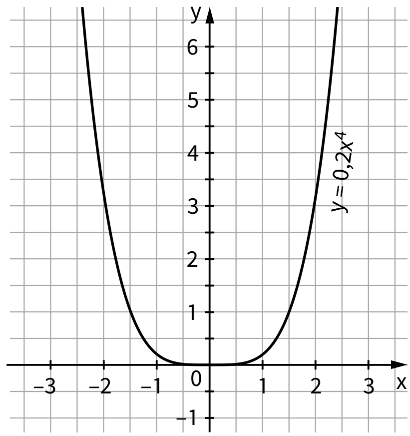


d) Der Funktionsgraph zu $y = 0{,}2\,x^4$ fällt für alle negativen x aus den reellen Zahlen und steigt für alle positiven x aus den reellen Zahlen. Da $y = -0{,}2\,x^4$ durch eine Spiegelung des Graphen zu $y = 0{,}2\,x^4$ an der x-Achse hervorgeht, ist auch das Steigungsverhalten gegenteilig: Die Steigungswerte unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen. Außerdem sind beide Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse.

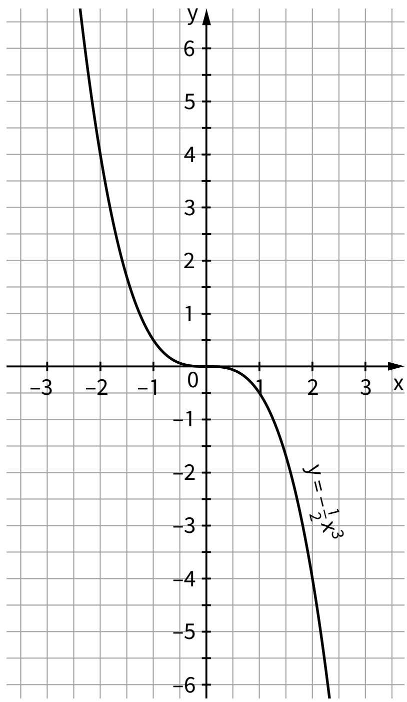


214

3. **a)** Stauchen mit dem Faktor 0,2 parallel zur y-Achse, symmetrisch zur y-Achse.

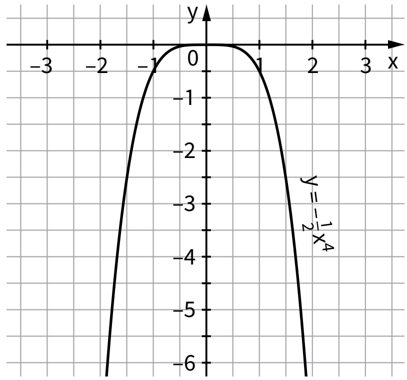


b) Spiegeln an der x-Achse, Stauchen mit Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung.

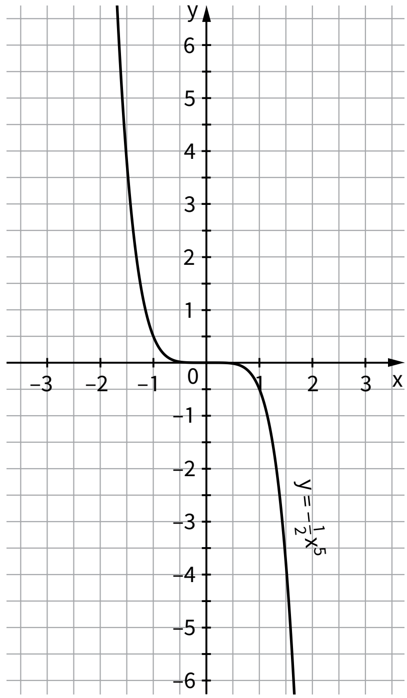


214

3. c) Spiegeln an der x-Achse, Stauchen mit Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse, symmetrisch zur y-Achse.



d) Spiegeln an der x-Achse, Stauchen mit Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung.



214

4. **a)** Das Volumen verachtfacht bzw. ver-27-facht sich.

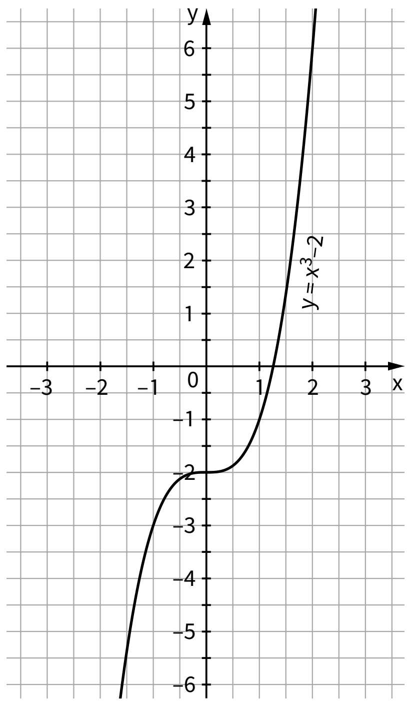
b) Der Oberflächeninhalt vervierfacht bzw. verneunfacht sich.
Die Gesamtkantenlänge verdoppelt bzw. verdreifacht sich.

c) Sei x der Faktor für die Seitenlänge s. Dann gilt für

- das Volumen V:
  $V(x) = x^3$
  $V(s\,x) = (s\,x)^3 = s^3 x^3 = s^3 \cdot V(x)$
- den Oberflächeninhalt O:
  $O(x) = 6\,x^2$
  $O(s\,x) = 6 \cdot (s\,x)^2 = s^2 \cdot 6\,x^2 = s^2 \cdot O(x)$
- die Gesamtkantenlänge k:
  $k(x) = 12\,x$
  $k(s\,x) = 12 \cdot (s\,x) = s \cdot 12\,x = s \cdot k(x)$

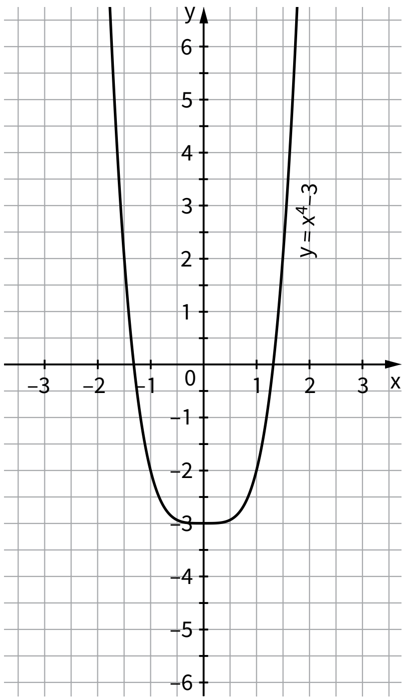
Allgemein gilt:
$f(x) = c \cdot x^n$; daraus folgt $f(k\,x) = c \cdot (k\,x)^n = c \cdot k^n \cdot x^n$; also $f(k\,x) = k^n \cdot f(x)$.

5. **a)** Aus dem Graphen zu x^3: nach unten um 2 verschoben.

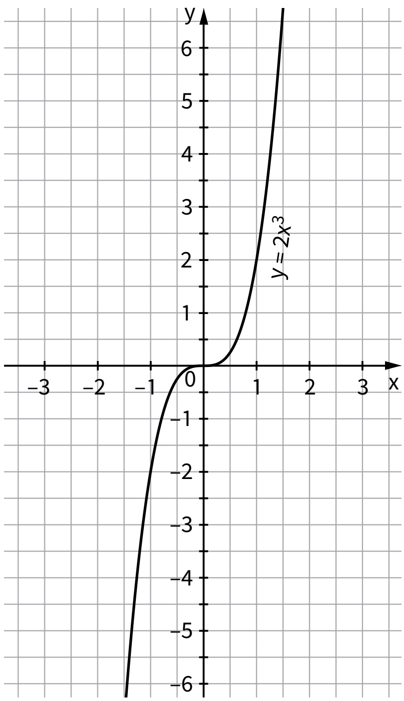


214

5. b) Aus dem Graphen zu x^4: nach unten **5.**
um 3 verschoben.

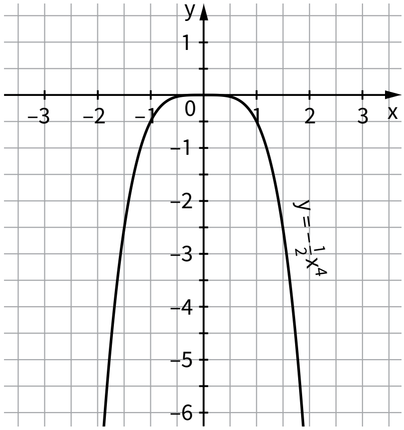


c) Aus dem Graphen zu x^3: gestreckt
mit dem Faktor 2.

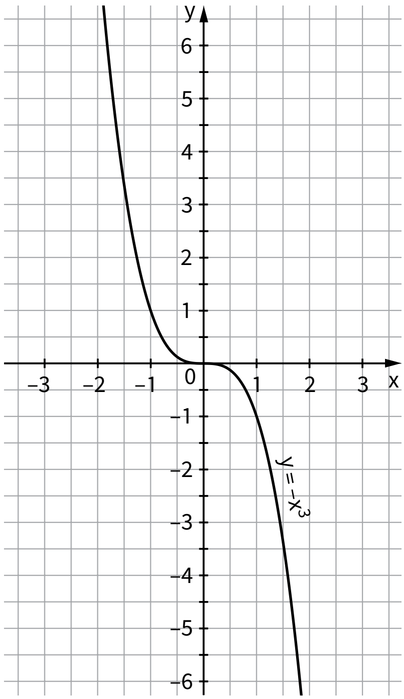


214

5. **d)** Aus dem Graphen zu x^4: gestreckt mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

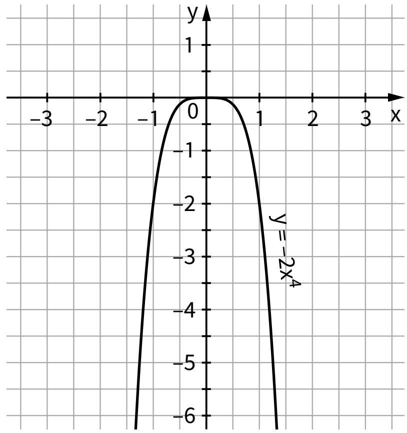


e) Aus dem Graphen zu x^3: an der x-Achse gespiegelt.

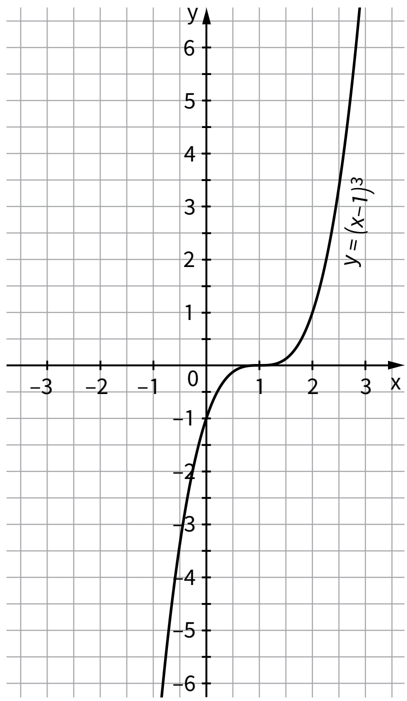


214

5. f) Aus dem Graphen zu x^4: an der x-Achse gespiegelt und gestreckt mit dem Faktor 2.

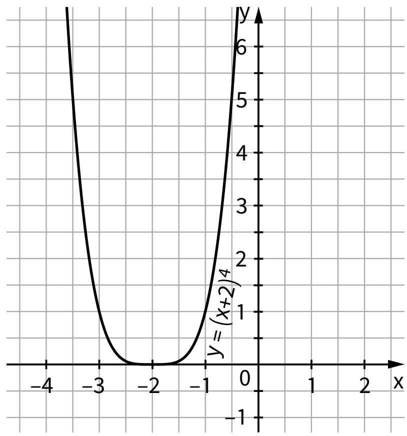


g) Aus dem Graphen zu x^3: nach rechts um 1 verschoben.



214

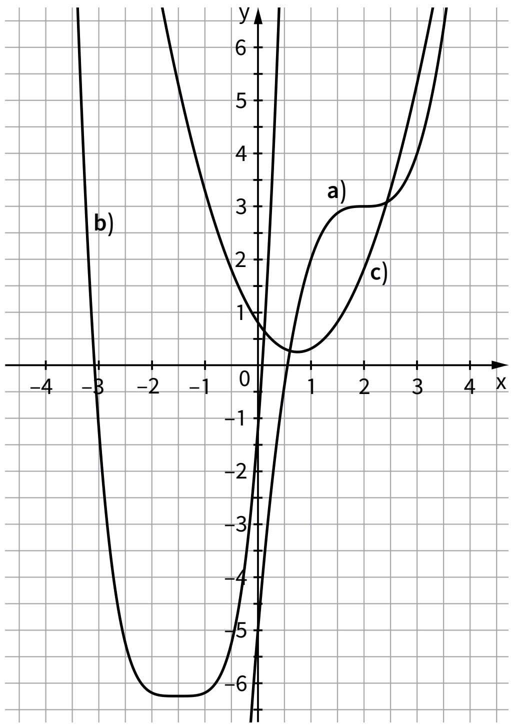
5. **h)** Aus dem Graphen zu x^4: nach links um 2 verschoben.



6. **a)** **(1)** $y = 0{,}5\,x^3$ **b)** **(4)** $y = 0{,}5 \cdot x^4$ **c)** **(6)** $y = x^6 - 1$ **d)** **(2)** $y = (x + 2)^3$

7. **a)** $f(x) = -x^3$; $f(4) = -81$; $f(-5) = 125$
b) $f(x) = -0{,}1\,x^4$; $f(4) = -25{,}6$; $f(-5) = -62{,}5$

8. **a)** Verschiebung des Graphen zu $y = x^3$ um 2 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach oben
b) Verschiebung des Graphen zu $y = x^4$ um 1,5 Einheiten nach links und um 6,25 Einheiten nach unten
c) Verschiebung des Graphen zu $y = x^5$ um 0,75 Einheiten nach rechts und um 0,25 Einheiten nach oben

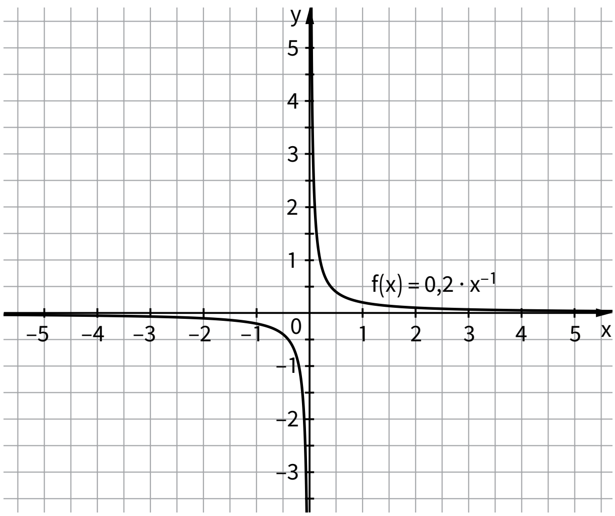


215 **9.** **(1)** a) **(2)** a), c) **(3)** a) **(4)** a), b), d) **(5)** – **(6)** b), c)

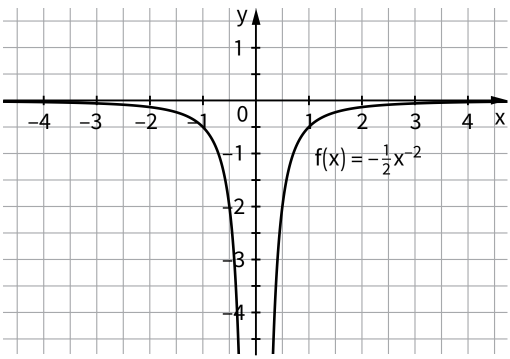
10. a) $y = \frac{5}{8}x^2$ **b)** $y = -\frac{4}{27}x^3$ **c)** $y = -\frac{2}{3}x^2$ **d)** $y = \frac{1}{6}x^3$

11. a) Aus dem Graphen zu x^{-1}: nach oben um 2 verschoben.
b) Aus dem Graphen zu x^{-2}: nach unten um 3 verschoben.
c) Aus dem Graphen zu x^{-1}: gestreckt mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.
d) Aus dem Graphen zu x^{-2}: gestreckt mit dem Faktor 2.
e) Aus dem Graphen zu x^{-1}: an der x-Achse gespiegelt.
f) Aus dem Graphen zu x^{-2}: an der x-Achse gespiegelt und gestreckt mit dem Faktor 3.
g) Aus dem Graphen zu x^{-1}: nach links um 2 verschoben.
h) Aus dem Graphen zu x^{-2}: nach rechts um 1 verschoben.

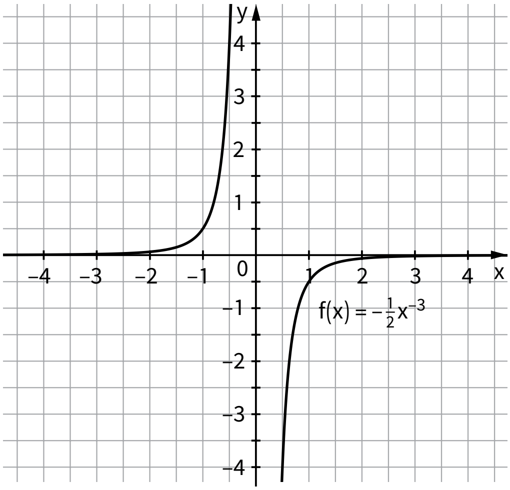
12. a) Punktsymmetrisch zum Ursprung



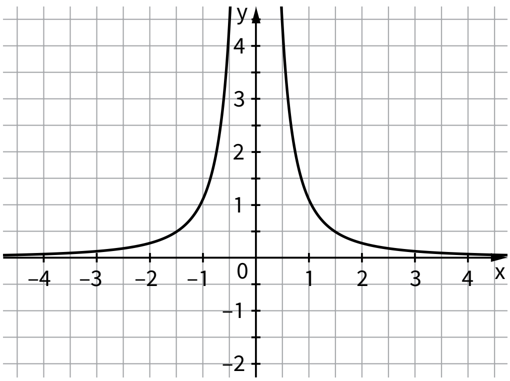
b) Achsensymmetrisch zur y-Achse



215 **12. c)** Punktsymmetrisch zum Ursprung



d) Achsensymmetrisch zur y-Achse



13. (**A**) und (**8**) $y = 0{,}5 \cdot x^{-3}$ (**C**) und (**3**) $y = x^{-3} - 2$
(**B**) und (**4**) $y = 2x^{-2}$ (**D**) und (**7**) $y = -2x^{-2}$

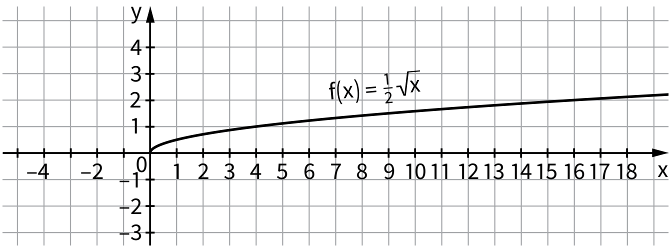
14. (**1**) c), e), f) (**2**) b), d), e), f) (**3**) a), b), c), e), f) (**4**) c), e), f)

216 **15. a)** Richtige Reihenfolge der Graphen: unten links, unten rechts, oben rechts, oben links
Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5\,(x - 2)^{-1} + 1$

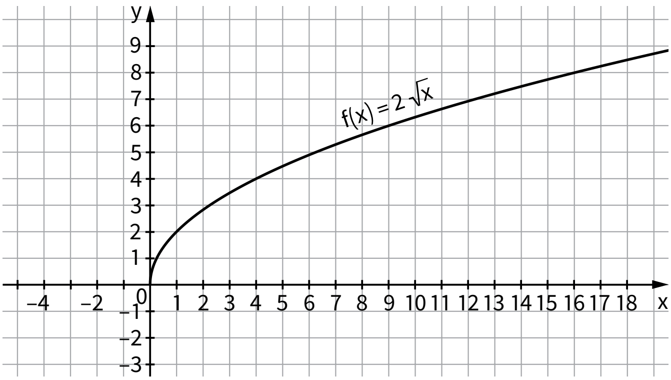
b) –

216

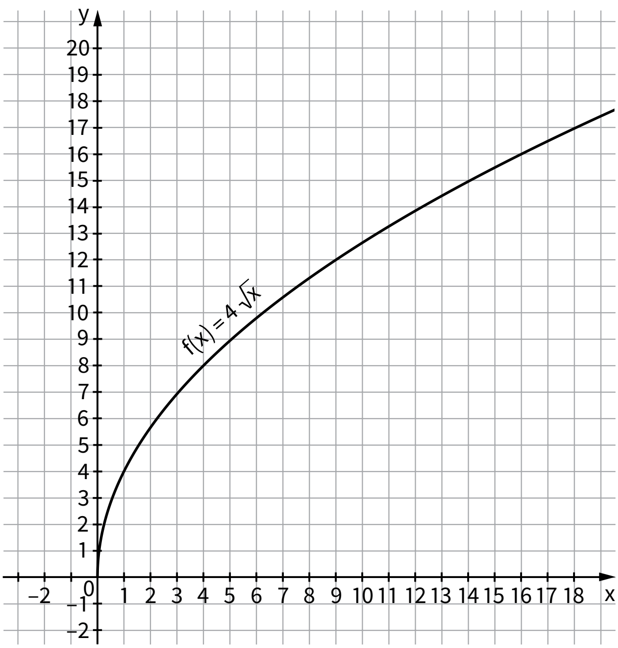
16. a) Streckung des Graphen mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse.
Der Graph steigt langsamer als der Graph der Wurzelfunktion.



b) Streckung des Graphen mit dem Faktor 2 parallel zur y-Achse.
Der Graph steigt schneller als der Graph der Quadratwurzelfunktion.



c) Streckung des Graphen mit dem Faktor 4 parallel zur y-Achse.
Der Graph steigt schneller als der Graph der Quadratwurzelfunktion.



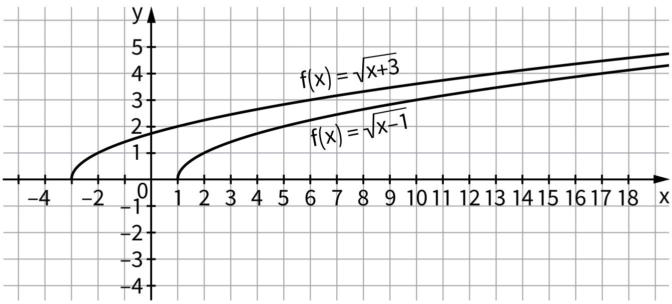
216

17. **(1)** Spiegelung der Quadratfunktion an der x-Achse;
Streckung des Graphen mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse;
Der Graph steigt vom Betrag langsamer als der Graph der Wurzelfunktion, fällt aber dauerhaft im vierten Quadranten.

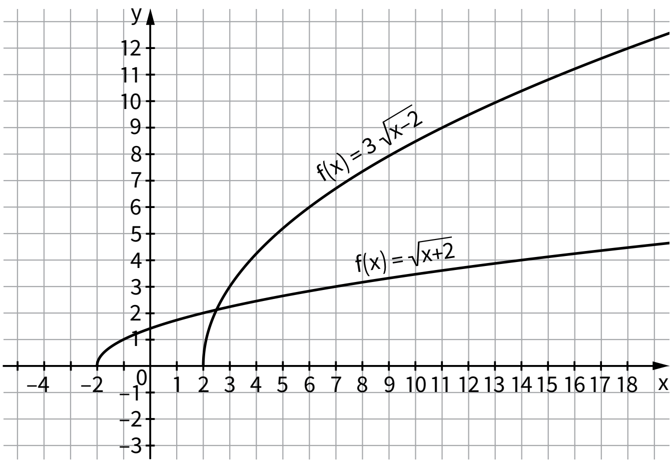
(2) Spiegelung der Quadratfunktion an der x-Achse;
Der Graph steigt vom Betrag genauso stark wie der Graph der Wurzelfunktion, fällt aber dauerhaft im vierten Quadranten.

(3) Spiegelung der Quadratfunktion an der x-Achse;
Streckung des Graphen mit dem Faktor 2 parallel zur y-Achse;
Der Graph steigt vom Betrag her schneller als der Graph der Wurzelfunktion, fällt aber dauerhaft im vierten Quadranten.

18. **a)** Der Graph wurde um 3 Einheiten nach links verschoben.
b) Der Graph wurde um 1 Einheit nach rechts verschoben.



c) Der Graph wurde um 2 Einheiten nach links verschoben.
d) Der Graph wurde um 2 Einheiten nach rechts verschoben und um den Faktor 3 parallel zur y-Achse gestreckt.



216

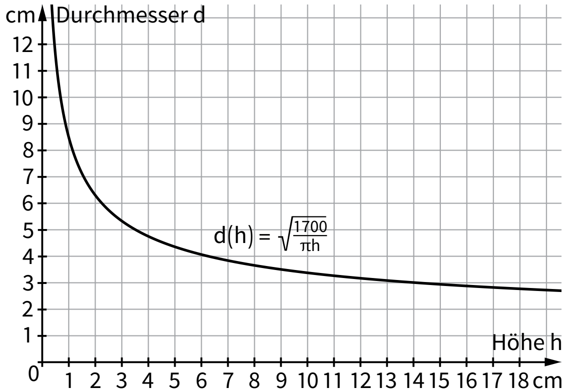
19. a) $425 = \pi r^2 h$ mit $r = \frac{d}{2}$

$425 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h$

Daraus folgt:

$d(h) = \sqrt{\frac{1700}{\pi h}}$

b) Der Durchmesser ändert sich bei einer Verdopplung der Höhe um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



5.7 Lösungsmenge von Potenzgleichungen

217

Einstieg:

(1) $x = \sqrt[3]{27} = 3$

(2) $x = -\sqrt[3]{27} = -3$

(3) $x = 0.$

Verallgemeinerung der Lösung siehe roter Kasten auf Seite 63 unten.

218

2. a) **(1)** $x = \sqrt[4]{10\,000} = 10$ und $x = -\sqrt[4]{10\,000} = -10$

(2) $x = 0$, da nur 0 potenziert wieder 0 ergibt.

(3) $L = \{\ \}$, da es keine Zahl gibt, die potenziert mit einem geraden Exponenten eine negative Zahl ergibt.

(4) $x = \sqrt[4]{20}$ und $x = -\sqrt[4]{20}$

b) **(1)** $x = \sqrt[5]{32} = 2$

(2) $x = 0$, da nur 0 potenziert wieder 0 ergibt.

(3) $x = -\sqrt[5]{243} = -3$

(4) $x = \sqrt[5]{30}$

c) Eine Potenzgleichung der Form $a = x^n$ hat für gerade Exponenten entweder eine, zwei oder keine und für ungerade Exponenten immer genau eine Lösung. Graphisch lässt sich dies daran festmachen, dass der Graph zu einer ungeraden Potenzfunktion jeden y-Wert erreicht, während der Graph zu einer geraden Potenzfunktion nur in einem Intervall, dessen eine Grenze plus oder minus Unendlich ist und dessen andere Grenze eine reelle Zahl ist, alle y-Werte erreicht.

218

3.

		Näherungslösung	Exakte Lösung
(1)	$x^3 = 2$	$\{1{,}3\}$	$\{\sqrt[3]{2}\}$
	$x^3 = -3$	$\{-1{,}4\}$	$\{-\sqrt[3]{3}\}$
	$x^3 = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$
(2)	$x^4 = 2$	$\{1{,}2; -1{,}2\}$	$\{\sqrt[4]{2}; -\sqrt[4]{2}\}$
	$x^4 = -3$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
	$x^4 = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$
(3)	$x^5 = 2$	$\{1{,}1\}$	$\{\sqrt[5]{2}\}$
	$x^5 = -3$	$\{-1{,}2\}$	$\{-\sqrt[5]{3}\}$
	$x^5 = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$
(4)	$x^6 = 2$	$\{1{,}1; -1{,}1\}$	$\{\sqrt[6]{2}; -\sqrt[6]{2}\}$
	$x^6 = -3$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
	$x^6 = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$

4. **a)** $L = \{6\}$
b) $L = \{-10\}$
c) $L = \{10\}$
d) $L = \{-2; 2\}$
e) $L = \{-1\}$
f) $L = \{-2\}$
g) $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
h) $L = \{-3; +3\}$
i) $L = \{-3; 3\}$
j) $L = \{0\}$

219

5.
- $x^5 = 243$ gehört zur Lösung 3
- $x^4 = 81$ gehört zur Lösung $\{-3; +3\}$
- $x^6 = -729$ gehört zur Lösung $\{\ \}$
- $x^3 = -27$ gehört zur Lösung -3
- $x^7 = 0$ gehört zur Lösung 0

6. **a)** $x = \sqrt[4]{12}$ und $x = -\sqrt[4]{12}$
b) $x = \sqrt[7]{\frac{1}{3}}$
c) $x = -\sqrt[3]{6}$
d) $L = \{\ \}$
e) $x = 2$
f) $x = 3$
g) $x = 7$
h) $x = \sqrt[4]{4} + 10$ und $x = -\sqrt[4]{4} + 10$

7. **a)** $(-7)^{\frac{1}{5}}$ ist nicht definiert; $L = \left\{-7^{\frac{1}{5}}\right\}$
b) Es gibt zwei Lösungen. $L = \left\{-1{,}7^{\frac{1}{4}}; 1{,}7^{\frac{1}{4}}\right\}$
c) Bei ungeraden Exponenten gibt es nur eine Lösung. $L = \left\{9^{\frac{1}{3}}\right\}$
d) Die Aufgabe ist für ungerade Exponenten lösbar. $L = \{1\}$

8. **a)** **(1)** $\{-8; 8\}$ **(2)** $\{4\}$ **(3)** $\{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$ **(4)** $\{\sqrt[5]{64}\}$
b) **(1)** $\{\ \}$ **(2)** $\{-1\}$ **(3)** $\{\ \}$ **(4)** $\{-1\}$

219

8. c)

	eine Lösung	keine Lösung	zwei Lösungen
(1)	$a = 0$	$a < 0$	$a > 0$
(2)	a beliebig	–	–
(3)	$a = 0$	$a < 0$	$a > 0$
(4)	a beliebig	–	–

9. a) $x^4 = 81$ **b)** $x^3 = -125$ **c)** $x^7 = 0$ **d)** $x^6 = -729$

10. –

11. a) Eine Lösung für $k = -81$; keine Lösung für $k < -81$;
zwei Lösungen für $k > -81$.
b) Zum Beispiel $4x^4 - 4 = -4$; $L = \{0\}$

Das kann ich noch!

A) **(1)** $L = (3\,|\,-1)$ **(2)** $L = (-2\,|\,-3)$ **(3)** $L = \big((x, y)\,|\,y = 4x + 2\big)$

B) *Gleichungssystem:* $\left|\begin{array}{c} 2a + 2b = 11{,}4 \\ (a - 0{,}5)(b + 1{,}5) = a \cdot b + 3{,}4 \end{array}\right|$ $L = \{(2{,}2\,|\,3{,}5)\}$

Ergebnis: Die eine Seite ist 2,2 cm, die andere Seite 3,5 cm lang.