2. Quadratische Zusammenhänge

Lernfeld: Krumm und doch symmetrisch

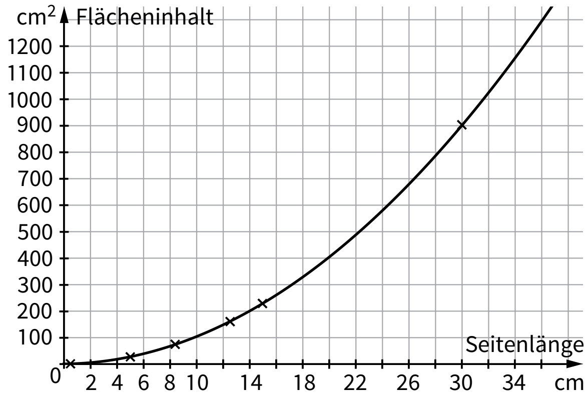
46 **1. Auftrag: Überall Quadrate: große und kleine**

Arbeitsauftrag:

Die Schülerinnen und Schüler suchen Quadrate in ihrer Umgebung und finden z. B. die Rechenkästchen, Schokoladentafeln, Bodenfliesen, Lichtschalter, CD-Hülle, Kante eines Würfels, ... Sinnvollerweise erstellen sie dazu eine Tabelle, in der sie ihre Berechnungen festhalten. Wichtig ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler auch sehr kleine Quadrate betrachten. In der Tabelle finden sich Quadrate, die in der Umgebung zu finden sein könnten:

Gegenstand	Seitenlänge (in cm)	Flächeninhalt (in cm^2)
Bodenfliese	30	900
Wandfliese	15	225
CD-Hülle	12,5	156,25
Lichtschalter	10	100
Schokoladentafel	8,4	70,56
Rechenkästchen	0,5	0,25
kleine Schokotafel	5	25

Anschließend zeichnen sie den zugehörigen Graphen, indem sie eine sinnvolle Einteilung der Achsen wählen. Es ergibt sich der Graph einer Parabel für die positiven x-Werte.



Möglicherweise werden sie die einzelnen Punkte mit dem Lineal verbinden, sodass ein Graph bestehend aus Polygonzügen entsteht. Dies sollte im Laufe des folgenden Kapitels thematisiert werden.

➔ Die Beschreibung des Graphen könnte folgende Punkte beinhalten: Graph ist nicht gerade, sondern eher krumm; steigt (schnell) an, sodass nicht alle Werte eingetragen werden können, er beginnt im Ursprung, etc.

46

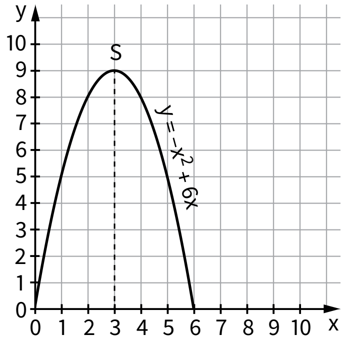
1. Auftrag: Fortsetzung

➜ Für den Fall, dass die Schülerinnen und Schüler vor dem Zeichnen eine Wertetabelle erstellt haben, werden sie sicherlich keine Schwierigkeiten haben, diese entsprechend für negative Werte fortzusetzen. Bei der Berechnung der Funktionswerte ist bei einigen Schülerinnen und Schülern zu erwarten, dass sie falsch quadrieren, sodass das negative Vorzeichen bestehen bleibt.
Im Idealfall werden sie jedoch die entsprechenden Funktionswerte richtig berechnen und den Graphen um diese Punkte ergänzen, sodass die Parabel vollständig gezeichnet ist. Beobachtungen hierzu könnten dann sein, dass die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse ist, einen tiefsten Punkt hat, der Graph für die negativen x-Werte fällt und für die positiven x-Werte steigt.

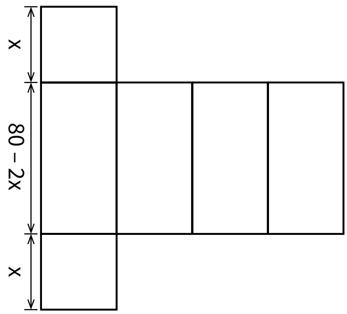
2. Auftrag: Was passiert, wenn man den Funktionsterm variiert?
Hier wird etwa das angeführt, was die Schüler nach der Zusammenfindung in Expertengruppen zusammentragen sollten:
Zusammenfassung zu Teilthema 1:
Der Parameter a sorgt für eine Streckung bzw. Stauchung der Graphen. Wenn a vergrößert wird, wird der Graph enger und wenn a verkleinert wird, dann wird der Graph breiter. Wenn a negativ gewählt wird, dann wird der Graph an der x-Achse gespiegelt und die Parabel ist im Gegensatz zu einem positiven Parameter a dann nach unten geöffnet.
Zusammenfassung zu Teilthema 2:
Der Parameter d sorgt für eine Verschiebung der Graphen parallel zur x-Achse: Er verschiebt für $d < 0$ den Graphen nach rechts und für $d > 0$ den Graphen nach links.
Zusammenfassung zu Teilthema 3:
Der Parameter e sorgt für eine Verschiebung der Graphen parallel zur y-Achse: Er verschiebt für $e < 0$ den Graphen nach unten und für $e > 0$ den Graphen nach oben.
Nullstellen:
Eine Parabel hat entweder keine, eine oder zwei Nullstellen. Die Normalparabel hat jeweils genau eine Nullstelle. Eine Rechts- oder Linksverschiebung hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Nullstellen, sondern nur auf deren Lage. Eine Spiegelung an der x-Achse hingegen hat zur Folge, dass die Anzahl der Nullstellen entweder bei 1 bleibt, oder sich von 0 auf 2 bzw. von 2 auf 0 ändert. Auch eine Veränderung des Parameters e und damit die Höhe der Funktion hat einen Einfluss auf die Anzahl der Nullstellen der Funktion.
Höchster Punkt:
Wenn zwei Nullstellen vorliegen, dann liegt der höchste Punkt exakt in der Mitte der beiden Nullstellen.

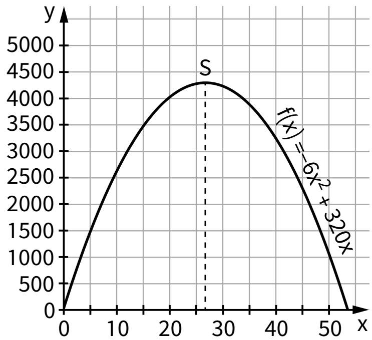
2.1 Quadratische Funktionen – Definition

47 **Einstieg:**
Wir kennzeichnen die gesuchten Seitenlängen mit x und y.
Dann gilt wegen Länge des Drahtes $x + y = 6$ und somit $y = 6 - x$.
Für den Flächeninhalt erhalten wir:
$A = x(6 - x) = -x^2 + 6x$.
Wir zeichnen den Graphen.
Der höchste Punkt ergibt sich für $x = 3$, woraus auch $y = 3$ folgt. Somit wird der Auslauf für ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 m am größten.
Der Flächeninhalt beträgt dann 9 m².



49 **3.**

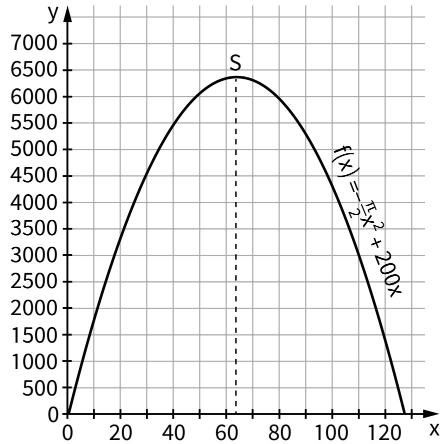




Wir erhalten für den Oberflächeninhalt den Term
$2x^2 + (80 - 2x) \cdot 4x = -6x^2 + 320x$ und zeichne den Graphen. Der höchste Punkt liegt bei $x = 26\frac{2}{3}$ cm. Für einen Würfel mit der Seitenlänge $x \approx 26{,}67$ cm ergibt sich die größtmögliche Oberfläche. Der Oberflächeninhalt beträgt dann 4 266,67 cm².

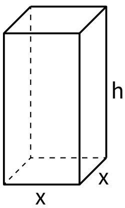
49

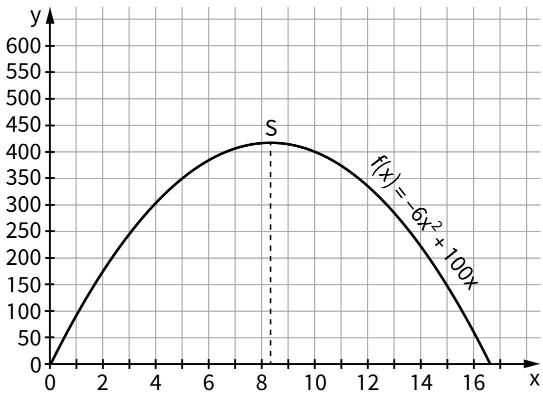
4.



Die beiden Halbkreise ergeben zusammen einen Kreis mit dem Durchmesser x.
Es gilt: $2l + \pi x = 400$, also $l = 200 - \frac{\pi}{2}x$. Für den Flächeninhalt des Spielfeldes erhalten wir den Term $\left(200 - \frac{\pi}{2}x\right) \cdot x = -\frac{\pi}{2}x^2 + 200x$ und zeichnen den Graphen.
Der höchste Punkt liegt bei $x \approx 63{,}66$.
$l \approx 100\,\text{m}$, $x \approx 63{,}66\,\text{m}$, $A \approx 6\,366\,\text{m}^2$

5.





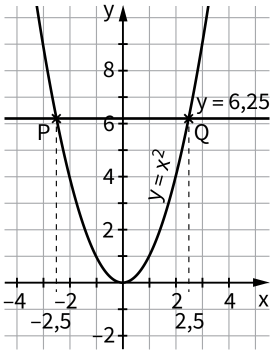
Für die Länge der Kanten erhalten wir (in cm); $8x + 4h = 100$, also $h = -2x + 25$
Für den Oberflächeninhalt erhalten wir den Term:
$2x^2 + 4x \cdot (-2x + 25) = 2x^2 - 8x^2 + 100x = -6x^2 + 100x$.
Der höchste Punkt liegt bei $x = 8\frac{1}{3}$, also $h = 8\frac{1}{3}$. Dies ist ein Würfel mit der Seitenlänge 8,33 cm. Der Oberflächeninhalt beträgt dann 416,67 cm².

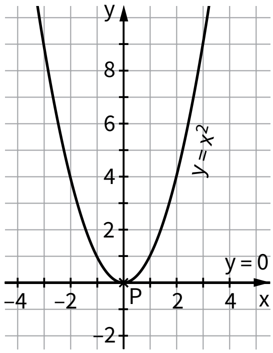
2.2 Normalparabel – Gleichungen der Form $x^2 = r$

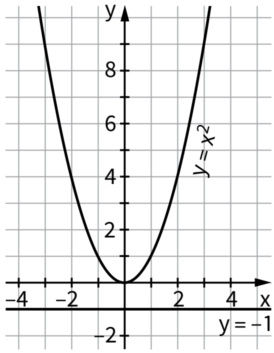
50 **Einstieg:**

Das Mädchen hat Recht. Man kann den Graphen für positive x-Werte dann an der y-Achse spiegeln.
Auch der Junge hat Recht, denn dann kann man den Graphen im Bereich zwischen 0 und 1 besser zeichnen.
Begründung für die Symmetrie zur y-Achse ist, dass x^2 auch für negative x-Werte positiv ist, also $x^2 = (-x)^2$. Daher ist der Scheitelpunkt auch bei $x = 0$.

51 **2.** **(1)** $L = \{-2{,}5;\ 2{,}5\}$ **(2)** $L = \{0\}$ **(3)** $L = \{\ \}$







52 **3.** –

4. **a)** Eigenschaften siehe Satz oben auf Seite 51 des Schülerbandes.
b) und **c)** **(1)** $f(0{,}7) = 0{,}49$; $f(1{,}3) = 1{,}69$; $f(2{,}6) = 6{,}76$; $f(-0{,}4) = 0{,}16$; $f(-1{,}7) = 2{,}89$; $f(-2{,}1) = 4{,}41$
(2) $f(0{,}4) = 0{,}16$; $f(2{,}1) = 4{,}41$; $f(x_3) = -1{,}69$ ist nicht definiert.

5. Die Normalparabel hat keine Ecken. Der Verlauf ist ansonsten ungefähr richtig.

6. **a)** **(1)** Der Flächeninhalt vervierfacht sich.
(2) Der Flächeninhalt verneunfacht sich.
(3) Der Flächeninhalt versechzehnfacht sich.
b) $2a^2 = (a \cdot x)^2$
$x = \sqrt{2}$
Die Seitenlängen müssen mit dem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert werden.

7. Der Preis sollte sich auf 31,92 € vervierfachen, da sich das Volumen vervierfacht.

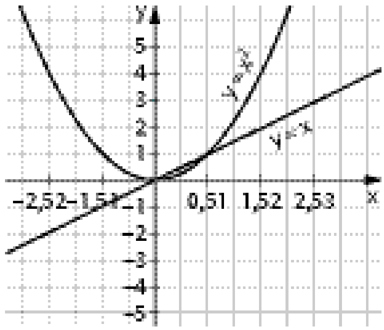
8. **a)** $L = \{-3;\ 3\}$ **c)** $L = \{\ \}$ **e)** $L = \{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$
b) $L = \{-\sqrt{13};\ \sqrt{13}\}$ **d)** $L = \{0\}$

52 **9.** Man quadriert die Lösungen.

a) $x^2 = 81$ **c)** $x^2 = 11$ **e)** $x^2 = 0$

b) $x^2 = 2{,}25$ **d)** $x^2 = 12$

10. Für alle $0 < x < 1$ gilt die Behauptung. Der Graph der Normalparabel verläuft genau in diesem Intervall unterhalb des Graphen zu $y = x$.



Das kann ich noch!

A) x: Eintrittspreis für Erwachsene (in €)
y: Eintrittspreis für Kinder (in €)

Gleichungssystem: $\left|\begin{array}{r} x + 2y = 22{,}00 \\ 2x + 3y = 37{,}50 \end{array}\right|$; Lösungsmenge: $L = \{(9 \mid 6{,}50)\}$

Für Erwachsene kostet der Eintritt 9,00 €, für Kinder 6,50 €.

2.3 Verschieben der Normalparabel

2.3.1 Verschieben der Normalparabel parallel zur y-Achse

53 **Einstieg:**

a) Der Graph wird um $|e|$ Einheiten in Richtung der y-Achse verschoben, für $e > 0$ nach oben und für $e < 0$ nach unten.

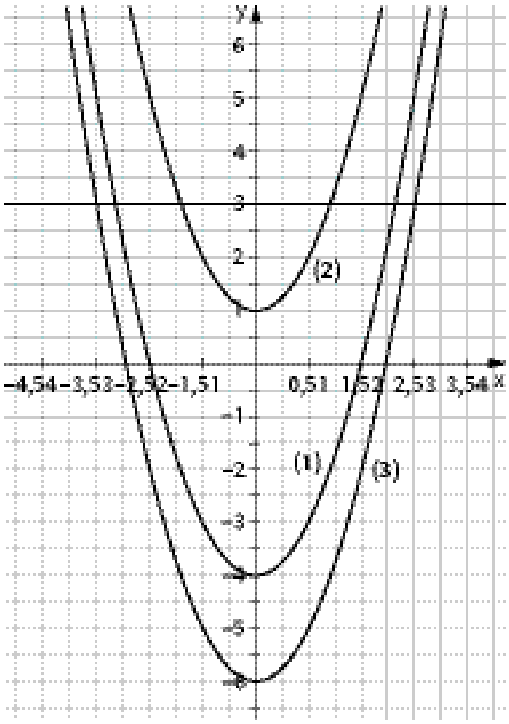
b) Den Wert für e kann man am Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse ablesen.

c) Siehe Merksatz auf Seite 54 des Schülerbandes.

d) –

54 **2.** Der gesuchte Funktionsterm lautet $f(x) = x^2 - 3$.

54 **3.** **a)** **(1)** $L = \{-2; 2\}$
(2) $L = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$
(3) $L = \{\ \}$
b) **(1)** $-\sqrt{7}$ und $\sqrt{7}$
(2) -3 und 3
(3) $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$



55 **4.** **a)** **(1)** $S(0|-6)$, $P_1(2{,}45|0)$, $P_2(-2{,}45|0)$ (gerundet)
(2) $S(0|3{,}5)$
(3) $S\left(0\middle|-\frac{1}{4}\right)$, $P_1\left(\frac{1}{2}\middle|0\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{2}\middle|0\right)$
(4) $S(0|-3)$, $P_1(1{,}73|0)$, $P_2(-1{,}73|0)$
b) Für $e > 0$ hat die Funktion keine Nullstellen. In allen anderen Fällen wohl.

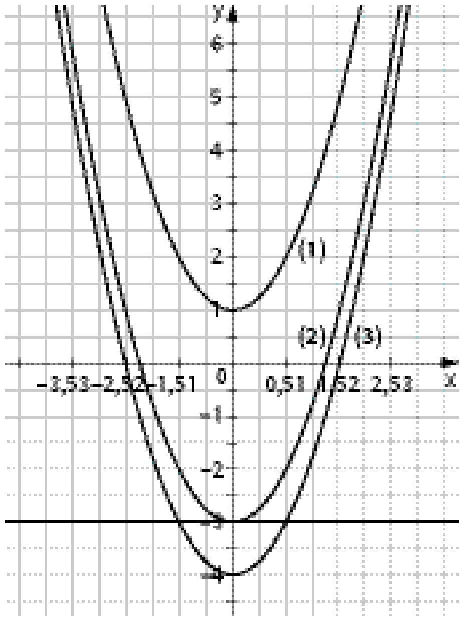
5. Die Graphen ergeben sich aus der Normalparabel durch Verschieben in Richtung der y-Achse (siehe auch Satz im Schülerband auf Seite 54 oben).

6. **a)** $f(x) = x^2 + 8$; $S(0|8)$ **c)** $f(x) = x^2 + 1$; $S(0|1)$
b) $f(x) = x^2 - 4{,}41$; $S(0|-4{,}41)$ **d)** $f(x) = x^2 - 6$; $S(0|-6)$

7. $y = x^2 - 6{,}25$; Nullstellen bei $x = -2{,}5$ und $x = 2{,}5$.

8. **a)** $f(x) = x^2 + 65{,}8$ **b)** $f(x) = x^2 - 49$ **c)** $f(x) = x^2 - 5$ **d)** –

55 **9.** **(1)** L = { }
(2) L = {0}
(3) L = {–1; 1}



10. a) L = {–3; 3}
b) L = {–3,5; 3,5}
c) $L = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$
d) $L = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$
e) L = { }
f) $L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
g) L = { }
h) L = {0}

Das kann ich noch!

A) Die Gleichung 3) gehört zu dem Zahlenrätsel. Die Zahl 6 erfüllt das Zahlenrätsel.

2.3.2 Verschieben der Normalparabel parallel zur x-Achse – Gleichungen der Form $(x + d)^2 = r$

56 **Einstieg:**
Keine Lösungen

2. **(1)** $f(x) = (x + 4)^2$
(2) $x = -4$
(3) Der Graph fällt für $x \le -4$ und steigt für $x \ge -4$.
(4) $f(x) = x^2 + 8x + 16$

57 **3.** Um 2,4 Einheiten nach rechts.

57

4. **a)** $L = \{3\}$
b) $L = \left\{-3 - \sqrt{5};\ -3 + \sqrt{5}\right\} \approx \{-5{,}24; -0{,}76\}$
c) **(1)** $L = \left\{-4 - \sqrt{5};\ -4 + \sqrt{5}\right\} \approx \{-6{,}24; -1{,}76\}$
(2) $L = \{-1; 5\}$
(3) $L = \{1\}$
(4) $L = \{\ \}$

5. **a)** $f(x) = x^2 - 10x + 25$ **b)** $f(x) = x^2 + 4x + 4$

6.
a) $S(2|0)$; $x = 2$
b) $S(-5|0)$; $x = -5$
c) $S(1{,}2|0)$; $x = 1{,}2$
d) $S(-2{,}5|0)$; $x = -2{,}5$
e) $S(-1|0)$; $x = -1$
f) $S(0{,}5|0)$; $x = 0{,}5$
g) $S\left(-\frac{4}{5}\middle|0\right)$; $x = -\frac{4}{5}$
h) $S(3|0)$; $z = 3$

7. Die Normalparabel wurde parallel zur x-Ache um 8 Einheiten nach links verschoben.

8.
(1) $f(x) = (x + 87)^2$
(2) $f(x) = (x - 37{,}5)^2$
(3) $f(x) = (x + 250)^2$
(4) $f(x) = (x + 10)^2$

9. $f(x) = (x - 1{,}5)^2$; $S(1{,}5|0)$

10. Zwei Lösungen: $f_1(x) = (x + 1)^2$; $f_2(x) = (x - 3)^2$

11. **a)** $f(x) = (x - 2)^2$; $S(2|0)$ $f(x) = (x + 2)^2$; $S(-2|0)$
b) keine Lösung
c) $f(x) = (x + 3)^2$; $S(-3|0)$ $f(x) = (x - 5)^2$; $S(5|0)$

58

12. **(1)** um 3 Einheiten nach links
(2) um 2,5 Einheiten nach rechts
(3) um $\frac{1}{2}$ Einheit nach rechts

13.
a) $L = \{-7; 3\}$
b) $L = \{-1; 7\}$
c) $L = \{-13; -1\}$
d) $L = \{3; 5\}$
e) $L = \{-2\}$
f) $L = \{3; 7\}$
g) $L = \{\ \}$
h) $L = \{-0{,}9; 2{,}1\}$

14. **a)** Kein Element für $r < 0$; ein Element für $r = 0$; zwei Elemente für $r > 0$.
b) Die Lösungsmenge hat zwei Elemente.

15. Der Term links wird mithilfe der 1. binomischen Formel umgeformt. Jetzt kann die Gleichung als reinquadratische Gleichung aufgefasst und gelöst werden. Abschließend wird nach x aufgelöst.

58

16. a) $L = \{-3; 9\}$
b) $L = \{-11; 3\}$
c) $L = \{4\}$
d) $L = \{0,4; 1,4\}$
e) $L = \{-7; 2\}$
f) $L = \{-0,7; 1,7\}$
g) $L = \{-8-\sqrt{7};\ -8+\sqrt{7}\}$
h) $L = \{1,5-\sqrt{5};\ 1,5+\sqrt{5}\}$
i) $L = \{2,5-2\sqrt{2};\ 2,5+2\sqrt{2}\}$

17. Druckfehler in der ersten Auflage im Schülerband: Die Aufgabenziffer ist falsch, 17 statt 16.
a) Die Seitenlänge betrug vorher 19 m.
b) $(x-4)^2 = 225$
Beispiel: Die Seitenlänge eines quadratischen Feldes muss um 4 m verkürzt werden, um die Größe von 225 m² zu erreichen.

2.3.3 Verschieben der Normalparabel in beliebiger Richtung – Scheitelpunktform – Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$

59

Einstieg:
a) $f(x) = (x+2)^2 - 1$ **b)** – **c)** –

61

3. a) $f(x) = x^2 - 6,4x + 8,84$
b) $f(x) = x^2 - 2ux + u^2 + v;\ \ p = -2u,\ \ q = u^2 + v$

4. a) Wenn der Term auf der linken Seite der Gleichung als Quadrat geschrieben werden kann, kann man die quadratische Gleichung lösen. Da das hier nicht der Fall ist, ergänzt man auf beiden Seiten der Gleichung einen Term, sodass das möglich ist.
b) **(1)** $x^2 - 8x + 16 = 0$
$(x-4)^2 = 0$
$L = \{4\}$
(2) $x^2 + 5x + 7 = 0$
$(x+2,5)^2 = -0,75$
$L = \{\ \}$

5. a) $f(x) = (x-4)^2 + 3 = x^2 - 8x + 19$
b) $f(x) = (x+4)^2 - 3 = x^2 + 8x + 13$
c) $f(x) = (x-2,5)^2 - 1 = x^2 - 5x + 5,25$
d) $f(x) = (x+1,5)^2 + 2 = x^2 + 3x + 4,25$

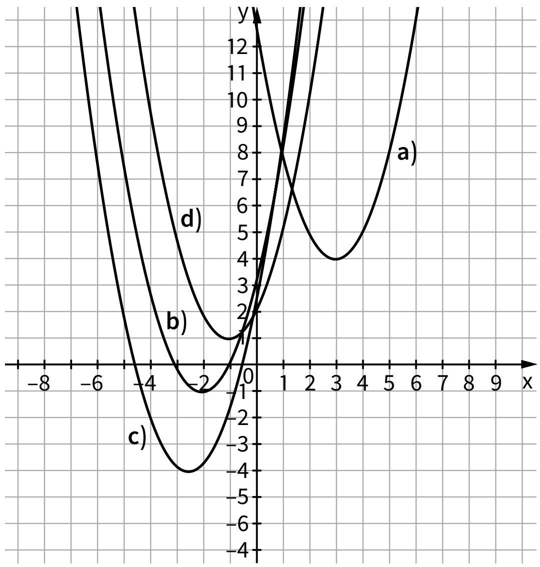
61

6. **a)** S(3|4); x = 3

b) S(−2|−1); x = −2

c) S(−2,5|−4);
x = −2,5

d) S(−1|1); x = −1



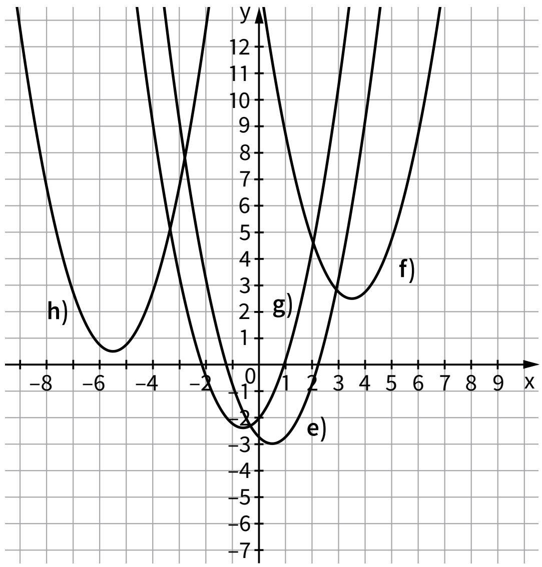
e) $S\left(\frac{1}{2}\middle|-3\right)$; $x = \frac{1}{2}$

f) $S\left(3{,}5\middle|\frac{5}{2}\right)$; $x = 3{,}5$

g) $S\left(\frac{3}{5}\middle|-2{,}4\right)$; $x = \frac{3}{5}$

h) $S\left(-\frac{11}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$; $t = -\frac{11}{2}$

Hinweis zu Teilaufgabe h):
Hier sollten die Achsen mit t und s beschriftet werden.



62

7.

Lage von S	e > 0	e = 0	e < 0
d < 0	1. Quadrant	x-Achse	4. Quadrant
d = 0	y-Achse	Koordinatenursprung	x-Achse
d > 0	2. Quadrant	x-Achse	3. Quadrant

8. **a)** P_2, P_4, P_5

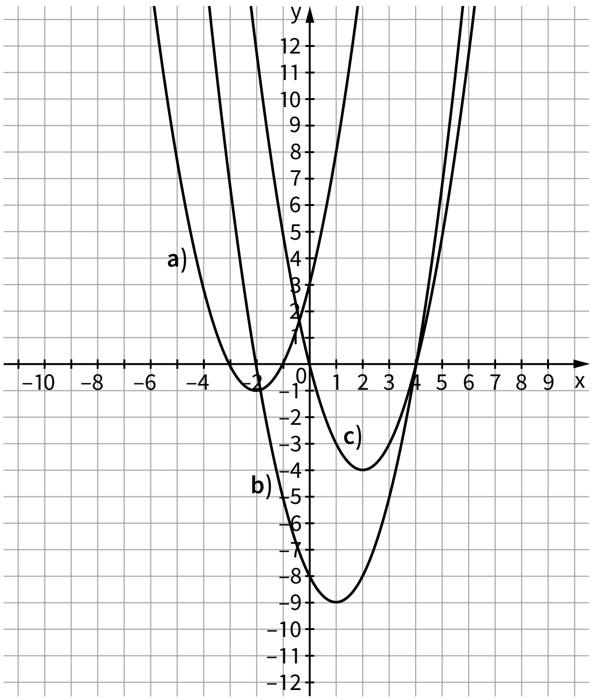
b) **(1)** L = {−1; 5} **(2)** L = {0; 4}

62

9. a) $f(x) = (x+2)^2 - 1$
$S(-2|-1)$

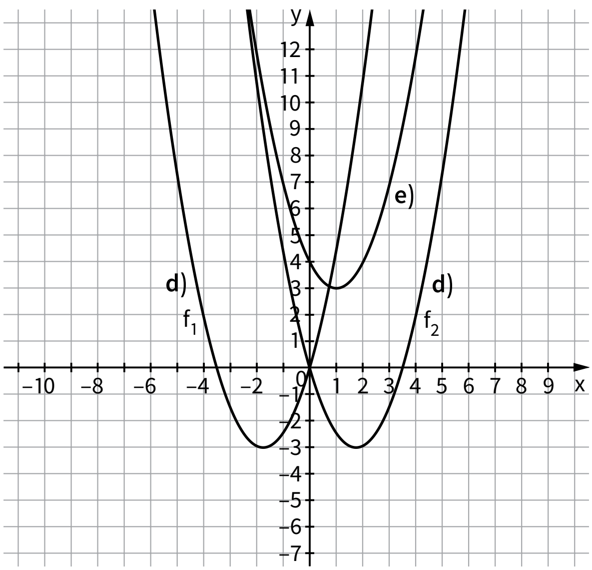
b) $f(x) = (x-1)^2 - 9$
$S(1|-9)$

c) $f(x) = (x-2)^2 - 4$
$S(2|-4)$



d) $f_1(x) = \left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 3$
$S(-1{,}73|-3)$
$f_2(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^2 - 3$
$S(\approx 1{,}73|-3)$

e) $f(x) = (x-1)^2 + 3$
$S(1|3)$



10. –

11. a) $f(x) = x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$
Verschiebung der Normalparabel mit neuem Scheitelpunkt $S(-3|-2)$.

b) –

62

12. Abdul: Falsch, richtig ist $S(1{,}5\,|\,-4{,}25)$.
Bo: Falsch, richtig ist $S(-2\,|\,-6)$, denn $x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6$.

13. a) Verschieben um 2 nach rechts und um 9 nach unten; $S(2\,|\,-9)$.
Der Graph fällt für $x \le 2$ und steigt für $x \ge 2$.
b) Verschieben um 3 nach links und um 4 nach unten; $S(-3\,|\,-4)$.
Der Graph fällt für $x \le -3$ und steigt für $x \ge -3$.
c) Verschieben um 2,5 nach rechts und um 1,25 nach unten; $S(2{,}5\,|\,-1{,}25)$.
Der Graph fällt für $x \le 2{,}5$ und steigt für $x \ge 2{,}5$.
d) Verschieben um 4 nach links und um 9 nach unten; $S(-4\,|\,-9)$.
Der Graph fällt für $x \le -4$ und steigt für $x \ge -4$.
e) Verschieben um 1 nach rechts und um 1 nach unten; $S(1\,|\,-1)$.
Der Graph fällt für $x \le 1$ und steigt für $x \ge 1$.
f) Verschieben um $\frac{3}{2}$ nach links und um $\frac{7}{4}$ nach oben; $S\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{7}{4}\right)$.
Der Graph fällt für $x \le -\frac{3}{2}$ und steigt für $x \ge -\frac{3}{2}$.
g) Verschieben um $\frac{1}{2}$ nach rechts und um $\frac{3}{4}$ nach unten; $S\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,-\frac{3}{4}\right)$.
Der Graph fällt für $x \le \frac{1}{2}$ und steigt für $x \ge \frac{1}{2}$.
h) Verschieben um $\frac{2}{3}$ nach rechts und um 1 nach unten; $S\left(\frac{2}{3}\,\middle|\,-1\right)$.
Der Graph fällt für $x \le \frac{2}{3}$ und steigt für $x \ge \frac{2}{3}$.

14. a) $f(x) = x^2 - 3x + 2{,}75$ **b)** $f(x) = x^2 + 2x$ **c)** $f(x) = x^2 - 6x + 7{,}5$

63

15. a) $f(x) = x^2 + 200x + 10\,034$
b) $f(x) = x^2 + 68x + 1\,171$
c) $f(x) = x^2 - 40x + 400 - p;\quad p > 0$

16. Alle Graphen sind Normalparabeln mit verschobenem Scheitelpunkt: Alle Scheitelpunkte liegen bei $S(3\,|\,-y)$. Die Funktionen $f_1(x)$; $f_5(x)$ und $f_6(x)$ lassen sich durch Umformen ineinander überführen.

$f_1(x) = (x-3)^2 - 25 = x^2 - 6x + 9$	$S(3\,|\,-25)$
$f_2(x) = x^2 - 6x - 15 = x^2 - 6x + 9 - 24$	$S(3\,|\,-24)$
$f_3(x) = (x-3)^2 - 5$	$S(3\,|\,-5)$
$f_4(x) = x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9$	$S(3\,|\,-9)$
$f_5(x) = x^2 - 6x - 16 = x^2 - 6x + 9 - 25$	$S(3\,|\,-25)$
$f_6(x) = (x-8)(x+2) = x^2 - 6x - 16$	$S(3\,|\,-25)$

17. –

18. a) ■ = 4
$L = \{-7;\ 3\}$
b) ■ = 16
$L = \{-3;\ 11\}$
c) ■ = 30,25
$L = \{1;\ 10\}$
d) ■ = 2,25
$L = \{-1{,}5\}$
e) ■ = 6,25
$L = \{-4{,}5;\ 9{,}5\}$
f) ■ = 12,25
$L = \{-7{,}5;\ 0{,}5\}$

63

19. **a)** $L = \{0; 8\}$
b) $L = \{-8; 0\}$
c) $L = \{-7; 1\}$
d) $L = \{-9; 1\}$
e) $L = \{-1; 3\}$
f) $L = \{-1; 5\}$
g) $L = \{-4; -1\}$
h) $L = \{\ \}$
i) $L = \{-2; 10\}$
j) $L = \{-8; 2\}$
k) $L = \{\ \}$
l) $L = \{-5; 1\}$

20. **a)** Fehler bei der quadratischen Ergänzung. Man hätte auf beiden Seiten 2,25 addieren müssen. Richtig ist: $L = \{-2{,}8; 5{,}8\}$
b) Die Lösungsmenge wurde falsch abgeschrieben. Richtig ist: $L = \{1; 2\}$
c) Julia hat durch $4x$ geteilt, das ist für $x = 0$ verboten. Richtig ist: $L = \{0; 2\}$

21. **a)** $L = \{-18; -2\}$
b) $L = \{-10\}$
c) $L = \{\ \}$
d) $L = \{-25; 5\}$
e) $L = \{1; 6\}$
f) $L = \{\ \}$
g) $L = \{-0{,}5; 11{,}5\}$
h) $L = \{-6 - \sqrt{3};\ -6 + \sqrt{3}\}$
i) $L = \{-20; -1\}$
j) $L = \{1{,}5 - \sqrt{2};\ 1{,}5 + \sqrt{2}\}$
k) $L = \{-10; 2\}$
l) $L = \{-4\}$

22. $(x + 3)^2 - 3^2 = 567$ mit $x \geq 0$, $L = \{21\}$ $x = 21\,m$

2.4 Strecken und Spiegeln der Normalparabel

64

Einstieg:
a) –
b) Siehe Merksatz auf Seite 66 des Schülerbandes.
c) –

66

3. Alle Graphen sind symmetrisch zur y-Achse. Die Graphen zu f_2 und f_4 haben den Scheitelpunkt als höchsten Punkt, die Graphen zu f_1 und f_3 haben den Scheitelpunkt als tiefsten Punkt. Die Graphen zu f_1 und f_3 sind nach oben, die zu f_2 und f_4 nach unten geöffnet. Die Graphen zu f_1 und f_3 fallen für $x \leq 0$ und steigen für $x \geq 0$, während die Graphen zu f_2 und f_4 für $x \leq 0$ steigen und für $x \geq 0$ fallen.
Die Graphen f_1 und f_2 sind steiler als die Normalparabel bzw. als die gespiegelte Normalparabel. Die Graphen f_3 und f_4 sind flacher als die Normalparabel bzw. als die gespiegelte Normalparabel.

67

4. Eine Fliese ist ungefähr $227\,cm^2$ groß, also ungefähr $225\,cm^2$. Das ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 15 cm.
Gleichung: $22x^2 = 5\,000$ (x Seitenlänge in cm; $0{,}5\,m^2 = 5\,000\,cm$)

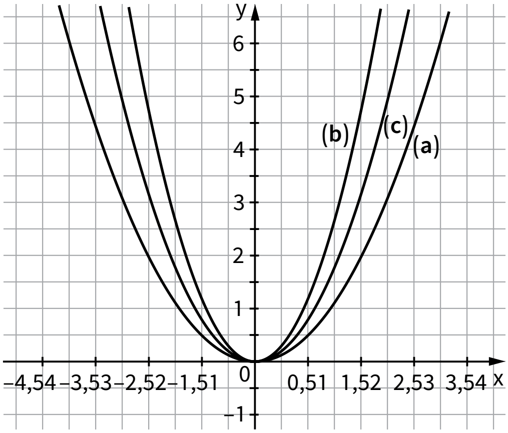
$$x^2 = \frac{5\,000}{22} \approx 227{,}3$$

$$x \approx \sqrt{227{,}3} \approx 15{,}1 \approx 15$$

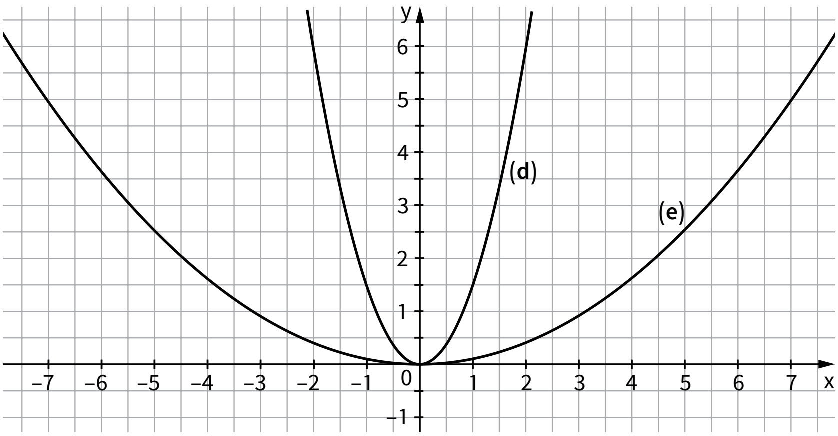
67

5. Die Graphen werden jeweils mit dem Faktor a gestreckt. Der Scheitelpunkt ist $S(0|0)$.

a), b), c)

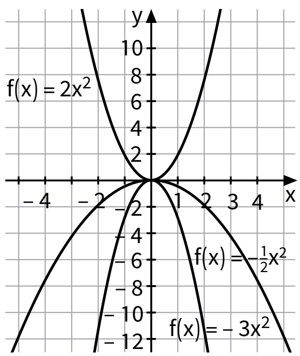


d), e)



6. **a)** Es werden die Funktionswerte für x an der Stelle 0, 1, −1, 2, −2 berechnet und markiert. Anschließend wird eine Kurve durch diese Punkte gelegt.

b)



67

7. Streckung der Normalparabel mit dem Streckfaktor:

a) $-2{,}5$ **b)** $0{,}8$ **c)** $-0{,}7$ **d)** $1{,}8$

Eigenschaften der Graphen:

a) und **c)**: Der Graph ist nach unten geöffnet, er steigt an im 3. Quadranten und fällt im 4. Quadranten.

b) und **d)**: Der Graph ist nach oben geöffnet, er fällt im 2. Quadranten und steigt im 1. Quadranten.

8. a) **(1)** P_1, P_3 **(2)** $\pm 0{,}5$ $[-; \pm 0{,}75; -; 0]$

b) **(1)** P_1, P_5 **(2)** – $[\pm 2; -; \pm 3; 0]$

c) **(1)** P_1, P_2 **(2)** – $\left[\pm \frac{2}{3}; -; \pm 1; 0\right]$

d) **(1)** P_1 **(2)** $\pm \frac{5}{3}$ $[-; \pm 2{,}5; -; 0]$

9. a) -1 **b)** 5 **c)** $-\frac{1}{15}$ **d)** $-\frac{1}{4}$

68

10. a) $f(x) = 1{,}5 \cdot x^2$ **b)** $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2$ **c)** $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ **d)** $f(x) = -x^2$

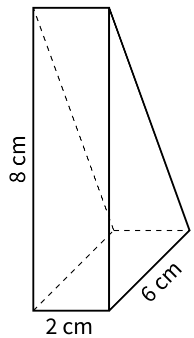
11. a) $y = 1{,}5\,x^2$ **c)** $y = -\frac{5}{8}x^2$ **e)** $y = -1{,}5\,x^2$

b) $y = 0{,}75\,x^2$ **d)** $y = 0{,}5\,x^2$ **f)** $y = -\frac{1}{4}x^2$

12. Der gelbe Graph gehört zu g (x).
Der rote Graph gehört zu l (x).
Der nach oben geöffnete blaue Graph gehört zu m (x).
Der grüne Graph gehört zu f (x).
Der nach unten geöffnete blaue Graph gehört zu k (x).

Das kann ich noch!

A) 1)



2) $A_O = 96\,\text{cm}^2$ $V = 48\,\text{cm}^3$

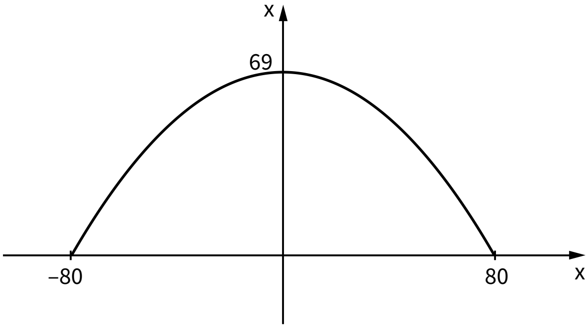
69

13. a) 1,25 m; 5 m; 11,25 m; 20 m; 31,25 m; 45 m

b) 7,16 s; 5,67 s; 8 s; 11,24 s; 8,54 s; 10,4 s; 9,4 s; 12,87 s
(Werte gerundet)

69

14. Nullstellen bei −80 und +80: Scheitelpunkt S(0|69).
$f(x) = a x^2 + 69$; $f(80) = 0$
$0 = a \cdot 80^2 + 69$, also $a = -\frac{69}{6400}$
$f(x) = -\frac{69}{6400} x^2 + 69$



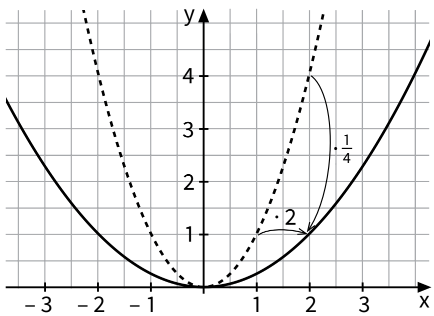
15. a) 0,25 m; 1 m; 2,25 m; 4 m; 6,25 m
b) **(1)** 1 s; **(2)** 1,73 s; **(3)** 3,16 s; **(4)** 4,9 s
(Werte gerundet)

70

16. a) Z. B. $f(x) = 2x^2$
b) Z. B. $f(x) = -0{,}5x^2$
c) $f(x) = 0{,}2x^2$
d) Z. B. $f(x) = -2x^2$

17. $f(x) = g(x)$, beide entsprechen der Normalparabel.
$h(x)$ entspricht der Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse

18. Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{4}$;
$f(x) = \frac{1}{4}x^2$



19. a) $L = \{-2{,}5; 2{,}5\}$
b) $L = \{-0{,}2; 0{,}2\}$
c) $L = \{-10; 10\}$
d) $L = \{0\}$
e) $L = \{-1{,}5; 1{,}5\}$
f) $L = \{\ \}$
g) $L = \{-3\sqrt{10}; 3\sqrt{10}\}$
h) $L = \{-1; 1\}$
i) $L = \{-4; 4\}$

20. $s = 3t^2$; $s = (3500 - 700)\,m = 2800\,m$; $t = 30{,}55\ldots\,s$
Die Fallzeit beträgt ungefähr 30 Sekunden. Wenn man hier auf 31 Sekunden rundet, wird der Fallschirm eventuell etwas zu spät geöffnet.

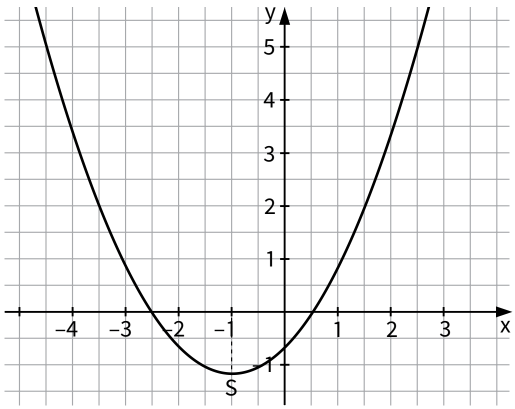
2.5 Strecken und Verschieben der Normalparabel – Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

71 **Einstieg:**

a) $f(x) = 0{,}5\,(x + 1)^2 - 1{,}2$

b) –

c) –



72 **2. a)** $f(x) = 3\,(x - 1)^2 + 3$; $S(1\,|\,3)$; $x = 1$

Verschieben um 1 nach rechts, Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 3, Verschieben um 3 nach oben.

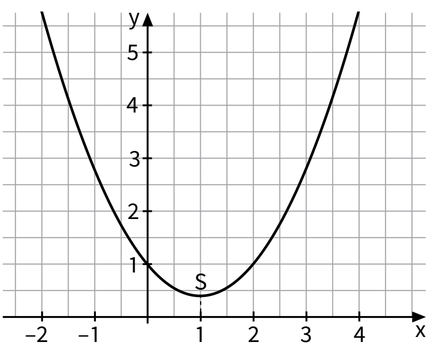
b) $f(x) = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{16}$; $S\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,-\frac{15}{16}\right)$; $x = \frac{1}{2}$

Verschieben um $\frac{1}{2}$ nach rechts, Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor $\left(-\frac{1}{4}\right)$, Verschieben um $\frac{15}{16}$ nach unten.

c) $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$; $S\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,c - \frac{b^2}{4a}\right)$; $x = -\frac{b}{2a}$

Verschieben um $-\frac{b}{2a}$ in Richtung der x-Achse, Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor a, Verschieben in Richtung der y-Achse um $c - \frac{b^2}{4a}$.

73 **3. a)**

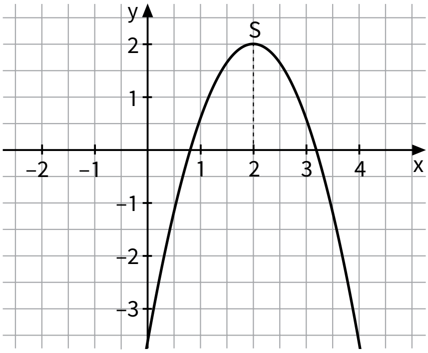


$f_1(x) = 0{,}6\,(x - 1)^2 + 0{,}4$

$S(1\,|\,0{,}4)$

73

3. **a)** Fortsetzung

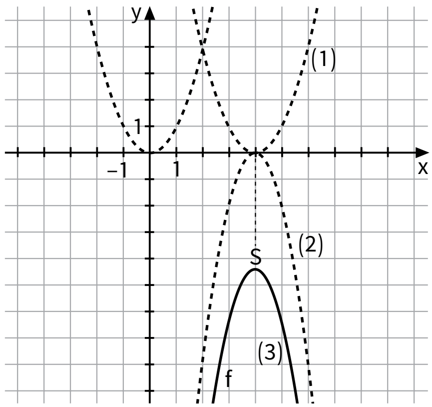


$f_2(x) = -1{,}4\,(x-2)^2 + 2$
$S(2\,|\,2)$

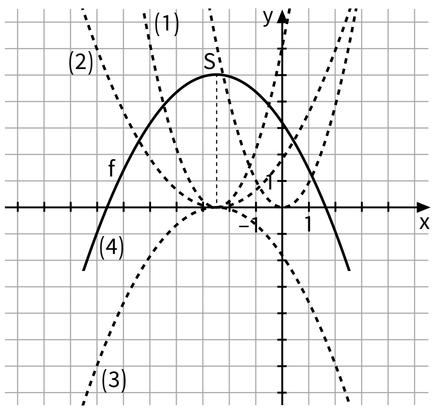
b) Wenn $a > 0$ ist, ist die Parabel nach oben geöffnet, also ist $S(-d\,|\,e)$ dann der tiefste Punkt.
Wenn $a < 0$ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet und $S(-d\,|\,e)$ ist der höchste Punkt.

4. $x^2 - 5x - 14 = 0 \quad L = \{-2; 7\}$

5. **a)** $S(4\,|\,-4{,}5)$;
$f(x) = -2\,(x-4)^2 - 4{,}5$



b) $S(-2{,}5\,|\,5)$;
$f(x) = -0{,}3\,(x+2{,}5)^2 + 5$



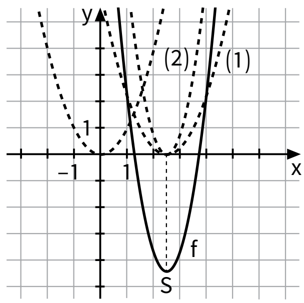
73 **6. a)** $f(x) = -1{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$; $S(-1|4)$; $x = -1$

b)

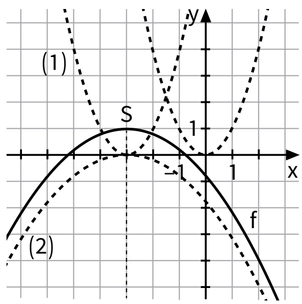
(1)	$f(x) = -1{,}5x^2 - 3x - 7{,}5$;	$S(-1\|-6)$;	$x = -1$
(2)	$f(x) = -1{,}5x^2 - 3x - 7{,}5$;	$S(-1\|-6)$;	$x = -1$
(3)	$f(x) = -1{,}5x^2 - 3x - 7{,}5$;	$S(-1\|-6)$;	$x = -1$
(4)	$f(x) = -1{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$;	$S(-1\|4)$;	$x = -1$
(5)	$f(x) = -1{,}5x^2 - 3x - 2{,}5$;	$S(-1\|-1)$;	$x = -1$

74 **7.** Vertauschbar sind die Paare: (1) und (2); (1) und (3); (1) und (4)
Nicht vertauscht werden dürfen: (2) und (3); (3) und (4)

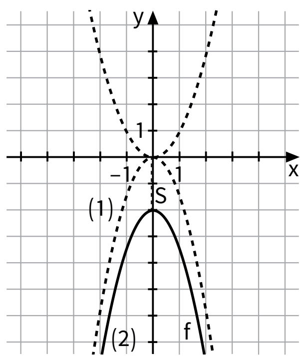
8. a) (1) Verschieben um 2,5 nach rechts.
(2) Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 3.
(3) Verschieben um 4,5 nach unten.
$f(x) = 3x^2 - 15x + 14{,}25$



b) (1) Verschieben um 3 nach links.
(2) Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor (–0,2).
(3) Verschieben um 1 nach oben.
$f(x) = -0{,}2x^2 - 1{,}2x - 0{,}8$

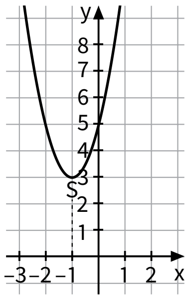


c) (1) Strecken in Richtung der y-Achse mit dem Faktor (–1,5).
(2) Verschieben um 2 nach unten.
$f(x) = -1{,}5x^2 - 2$

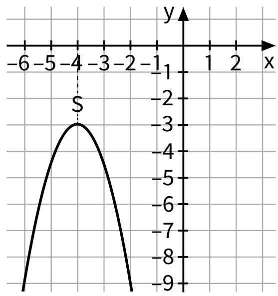


74 **9. a)** Wie Aufgabe 6 a) Seite 67 aber ausgehend vom Scheitelpunkt $S(3\,|\,-1)$.

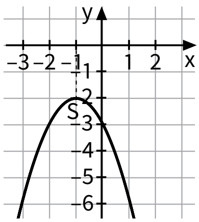
b) **(1)** $g(x) = 2(x+1)^2 + 3$



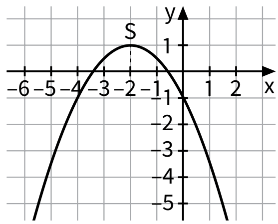
(2) $h(x) = -\frac{3}{2}(x+4)^2 - 3$



(3) $k(x) = -(x+1)^2 - 2$



(4) $l(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$



10. a) $f(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 12{,}5$; S ist tiefster Punkt.

b) $f(x) = -0{,}64x^2 - 3{,}2x - 1$; S ist höchster Punkt.

c) $f(x) = \frac{x^2}{16} - \frac{3}{16}x + \frac{9}{64}$; S ist tiefster Punkt.

11. a)	$f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{9}{2}$;	$S(5\,|\,-4{,}5)$;	nach oben geöffnet
b)	$f(x) = -2(x-1{,}5)^2 + 2$;	$S(1{,}5\,|\,2)$;	nach unten geöffnet
c)	$f(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{49}{6}$;	$S\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,-\frac{49}{6}\right)$;	nach oben geöffnet
d)	$f(x) = -3(x+1)^2 + 12$;	$S(-1\,|\,12)$;	nach unten geöffnet
e)	$f(x) = -3(x-1)^2 + 8$;	$S(1\,|\,8)$;	nach unten geöffnet
f)	$f(x) = \frac{1}{2}(x+5)^2 - \frac{25}{2}$;	$S\left(-5\,\middle|\,-\frac{25}{2}\right)$;	nach oben geöffnet
g)	$f(x) = (x-2)^2 - 0{,}5$;	$S(2\,|\,-0{,}5)$;	nach oben geöffnet
h)	$f(x) = -\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{36}$;	$S\left(\frac{1}{6}\,\middle|\,\frac{1}{36}\right)$;	nach unten geöffnet
i)	$f(z) = -1{,}5(z+2)^2 - 1{,}5$;	$S(-2\,|\,-1{,}5)$;	nach unten geöffnet

12. Anna: falsch, richtig ist $S(-1\,|\,0)$
Ben: falsch, richtig ist $S(2\,|\,-10)$
Carla: richtig
David: falsch, richtig ist $S(-2\,|\,13)$

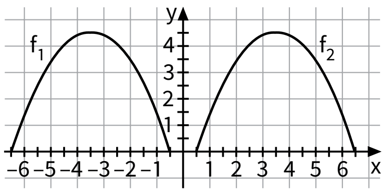
75 **13. a)** $S(1\,|\,2)$; P_1, P_3, P_4 **b)** $S(2\,|\,1)$; P_2, P_4, P_5 **c)** $S\left(-\frac{1}{6}\,\middle|\,-\frac{1}{24}\right)$; P_3, P_5, P_6

14. Faktor $a = \frac{1}{4}$; $f_1(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$

15. a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = x^2 + 0{,}5$
c) $f(x) = (x+1)^2(-1) = -x^2 - 2x - 1$
d) $f(x) = (-1)(x-1)^2 + 3 = -x^2 + 2x + 2$
e) $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$
f) $f(x) = -\frac{14}{45}(x-3)^2 + 2{,}8 = -\frac{14}{45}x^2 + \frac{28}{15}x$

16. a) Z. B. $f(x) = -2 \cdot (x-4)^2 - 4$
b) Z. B. $f(x) = 0{,}5(x-12)^2 + 8$
c) Z. B. $f(x) = 4(x+9{,}8)^2 + 4$
d) Z. B. $f(x) = (x-4)^2$

17. $f_1(x) = -\frac{1}{2}(x+3{,}5)^2 + 4{,}5$
$f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-3{,}5)^2 + 4{,}5$



76 **18.** $f(x) = x^2 - 4x + 5$

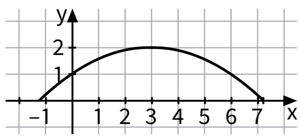
19. –

20. a) $L = \{-7; -1\}$
b) $L = \{-3; 2\}$
c) $L = \{-14; 2\}$
d) $L = \{-6; -4\}$
e) $L = \left\{\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right\}$
f) $L = \{6; 9\}$

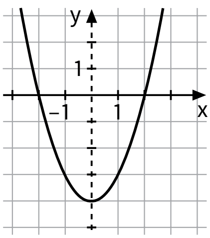
21. a) $L = \{2; 12\}$
b) $L = \{1; 3\}$
c) $L = \{-20; 5\}$
d) $L = \{4; 10\}$
e) $L = \{-17; 2\}$
f) $L = \{0{,}6; 1\}$
g) $L = \{\ \}$
h) $L = \{-1{,}4\}$
i) $L = \{1; 2{,}4\}$

22. a) Bei ungefähr $107\,\frac{km}{h}$ beträgt der Benzinverbrauch 7 ℓ pro 100 km.
b) Die Geschwindigkeit muss um $10\,\frac{km}{h}$ gesenkt werden.

23. Der Wasserstrahl reicht ungefähr 7,2 m weit.

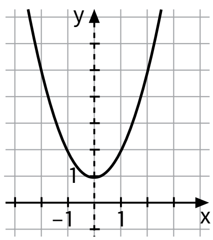


24. a)



Nullstellen: −2; 2

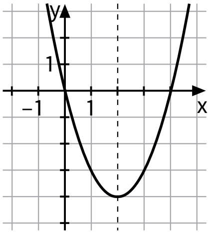
b)



keine Nullstelle

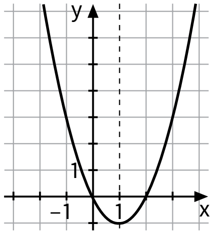
76

24. c)



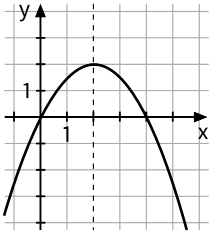
Nullstellen: 0; 4

d)



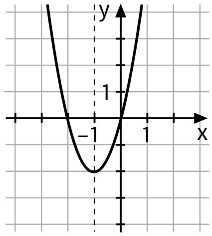
Nullstellen: 0; 2

e)



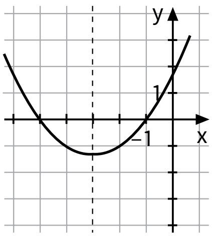
Nullstellen: 0; 4

f)



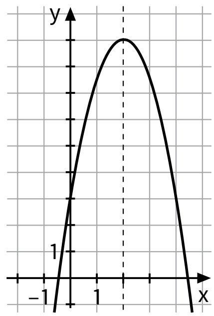
Nullstellen: – 2; 0

g)



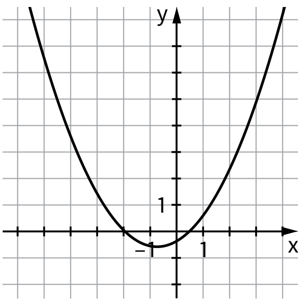
Nullstellen: – 5; – 1

h)



Nullstellen: $2 - \sqrt{6} \approx -0{,}45$; $2 + \sqrt{6} \approx 4{,}45$

i)



Nullstellen: – 2; 0,5

76

25. a) Nullstellen: $x = 9$ und $x = 1$
(1) $x = 5$
(2) nach oben geöffnet; tiefster Punkt $S(5\,|\,-16)$
(3) $P_1(0\,|\,9)$ und $P_2(10\,|\,9)$

b) Nullstelle: $x = -3$
(1) $x = -3$
(2) nach oben geöffnet; tiefster Punkt $S(-3\,|\,0)$
(3) $P_1(0\,|\,9)$ und $P_2(-6\,|\,9)$

c) Nullstellen: $x = -6$ und $x = -2$
(1) $x = -4$
(2) nach oben geöffnet; tiefster Punkt $S(-4\,|\,-3)$
(3) $P_1(0\,|\,9)$ und $P_2(-8\,|\,9)$

d) Nullstellen: $x = 2{,}5$ und $x = 0{,}5$
(1) $x = 1{,}5$
(2) nach unten geöffnet; höchster Punkt $S(1{,}5\,|\,2)$
(3) $P_1(0\,|\,-2{,}5)$ und $P_2(3\,|\,-2{,}5)$

e) Nullstellen: $x = 2{,}7$ und $x = -0{,}3$
(1) $x = 1{,}2$
(2) nach oben geöffnet; tiefster Punkt $S(1{,}2\,|\,-2{,}25)$
(3) $P_1(0\,|\,-0{,}81)$ und $P_2(2{,}4\,|\,-0{,}81)$

f) Nullstellen: $t = 0$ und $t = 4$
(1) $t = 2$
(2) nach oben geöffnet; tiefster Punkt $S(2\,|\,-1)$
(3) $P_1(0\,|\,0)$ und $P_2(4\,|\,0)$

77

26. a) $r < 16$ **b)** $r = 16$ **c)** $r > 16$

27. a) Der Graph steigt für $x \geq 1$ und fällt für $x \leq 1$.
Der Graph liegt oberhalb der x-Achse für $x < -5$ oder $x > 7$;
er liegt unterhalb der x-Achse für $-5 < x < 7$.

b) Der Graph steigt für $x \leq -2{,}5$ und fällt für $x \geq -2{,}5$.
Der Graph liegt oberhalb der x-Achse für $-3{,}5 < x < -1{,}5$;
er liegt unterhalb der x-Achse für $x < -3{,}5$ oder $x > -1{,}5$.

c) Der Graph steigt für $x \leq -10$ und fällt für $x \geq -10$.
Der Graph liegt oberhalb der x-Achse für $-12{,}5 < x < -7{,}5$;
er liegt unterhalb der x-Achse für $x < -12{,}5$ oder $x > -7{,}5$.

d) Der Graph steigt für $x \leq 22{,}5$ und fällt für $x \geq 22{,}5$.
Der Graph liegt oberhalb der x-Achse für $20 < x < 25$;
er liegt unterhalb der x-Achse für $x < 20$ oder $x > 25$.

e) Der Graph steigt für $x \leq -2$ und fällt für $x \geq -2$.
Der Graph liegt oberhalb der x-Achse für $-2 - \sqrt{5} < x < -2 + \sqrt{5}$;
er liegt unterhalb der x-Achse für $x < -2 - \sqrt{5}$ oder $x > -2 + \sqrt{5}$.

f) Der Graph steigt für $x \geq 5$ und fällt für $x \leq 5$.
Der Graph liegt überall oberhalb der x-Achse.

77

28. a) –

b) –

c) (1) $S(-3{,}25 \mid -44{,}12)$; $x_1 \approx 1{,}45$; $x_2 \approx -7{,}95$; der Graph fällt für $x < -3{,}25$ und steigt für $x > -3{,}25$; $x = -3{,}25$.

(2) $S(-69{,}56 \mid -123{,}50)$; $x_1 \approx 3{,}71$; $x_2 \approx -142{,}84$; der Graph fällt für $x < -69{,}56$ und steigt für $x > -69{,}56$; $x = -69{,}56$.

(3) $S(0{,}057 \mid 0{,}743)$; $x_1 \approx 0{,}17$; $x_2 \approx -0{,}06$; der Graph steigt für $x < 0{,}057$ und fällt für $x > 0{,}057$; $x = 0{,}057$.

(4) $S(0{,}06 \mid 106{,}16)$; es gibt keine Schnittpunkte; der Graph fällt für $x < 0{,}06$ und steigt für $x > 0{,}06$; $x = 0{,}06$.

29. a) Ungefähr 537 m.

b) (1) Ungefähr 759 m $\left(= 537 \cdot \sqrt{2}\right)$

(2) Ungefähr 1073 m $\left(= 759 \cdot \sqrt{2}\right)$

Doppelte Geschwindigkeit verdoppelt die Entfernung.

Doppelte Höhe erhöht die Entfernung nur um den Faktor $\sqrt{2}$ ($\approx 1{,}4$).

30. –

Im Blickpunkt: Bremsen und Anhalten von Fahrzeugen

78

1. a) Bremsweg jeweils in Meter.

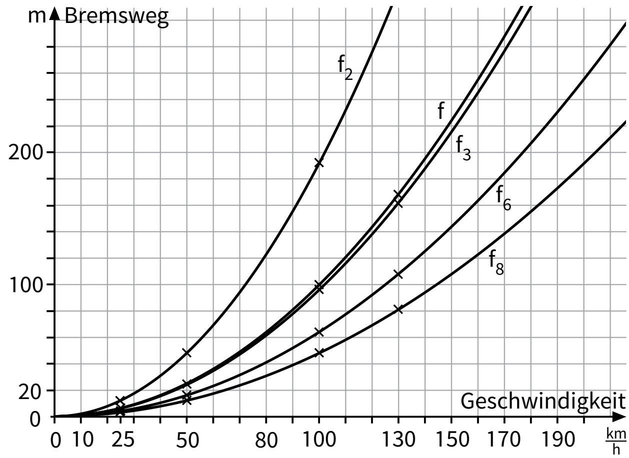
	$25\,\frac{km}{h}$	$50\,\frac{km}{h}$	$100\,\frac{km}{h}$	$130\,\frac{km}{h}$
trocken: 8	3,0	12,0	48,1	81,3
nass: 6	4,0	16,0	64,1	108,3
schneebedeckt: 3	8,0	32,1	128,2	216,6
vereist: 2	12,0	48,1	192,3	325,0
Pkw: 8	3,0	12,0	48,1	81,3
Lkw: 5	4,8	19,2	76,9	130,0
Motorrad: 10	2,4	9,6	38,5	85,0
Fahrrad: 3	8,0	32,1	–	–
Faustformel	3,125	12,5	50,0	84,5

b) Der Bremsweg vervierfacht sich bei Verdoppelung der Geschwindigkeit:

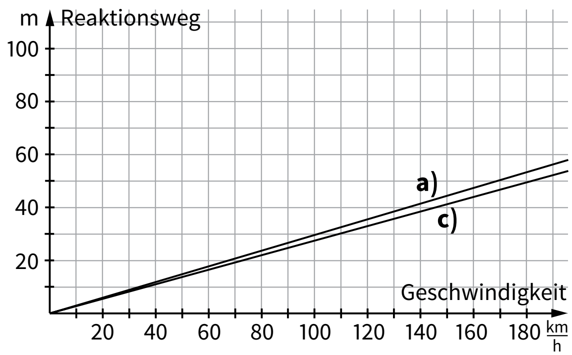
$$s_B = \frac{(2 \cdot v)^2}{26 \cdot a} = \frac{4 \cdot v^2}{26 \cdot a} = 4 \cdot \frac{v^2}{26 \cdot a}$$

79

2. Die Faustformel entspricht etwa der Bremsweglänge für trockene Fahrbahnen. Die Bremswege für Fahrbahnen mit schlechteren Wetterbedingungen sind alle länger, zum Teil erheblich länger.



3. a)



b) 13,89 m

c) $S_R\,(\text{in m}) = v\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\text{ s} = v\,\frac{1\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} \cdot 1\text{ s} = \left(\frac{1\,000}{3\,600} \cdot v\right)\text{m}$

$S_R\,(\text{in m}) = \left(\frac{1}{3{,}6} \cdot v\right)\,[\text{in m}]$

S_R ist der Weg, den man bei einer Geschwindigkeit von $v\left(\text{in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ in einer Sekunde zurücklegt, d. h. $S_R = v\left(\text{in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot 1\,(\text{in s})$.

Nun muss man km pro Stunde in Meter pro Sekunde umrechnen und man erhält $S_R\,(\text{in m}) = \frac{v\left(\text{in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)}{3{,}6}$.

4. a) Für den Reaktionsweg gilt: $S_R\,(\text{in m}) = \frac{v\left(\text{in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)}{3{,}6}$

Für den Bremsweg gilt: $S_B\,(\text{in m}) = \frac{\left(v\text{ in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{a \cdot 26} = b \cdot \left(v\text{ in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2$ mit $b = \frac{1}{26 \cdot a}$

Damit folgt für den Anhalteweg:

$S_A\,(\text{in m}) = S_R\,(\text{in m}) + S_B\,(\text{in m}) = \frac{1}{3{,}6}\left(v\text{ in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + b \cdot \left(v\text{ in }\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2$ wobei $b = \frac{1}{26 \cdot a}$

Graph siehe Lösung zu Teilaufgabe c).

79

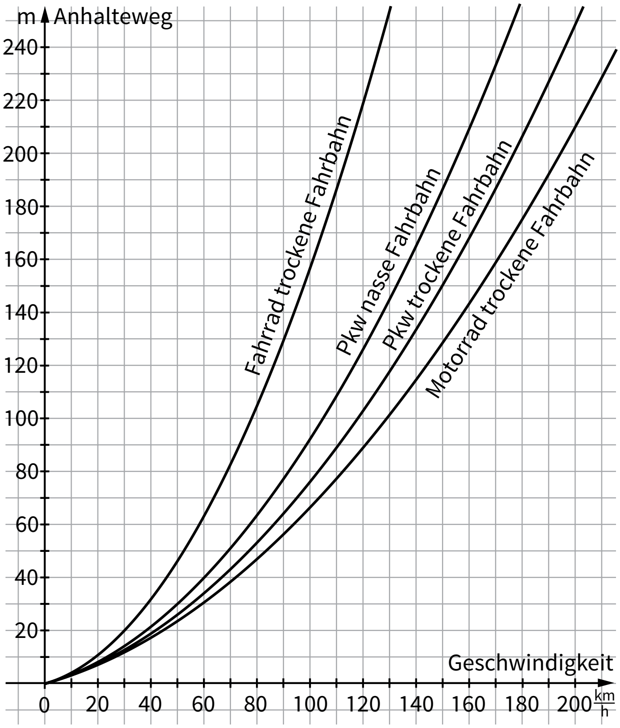
4. b) **(1)** $a = 8;\ b = \frac{1}{26 \cdot 8}$ $\quad f_1(v) = \frac{1}{3,6}v + \frac{1}{26 \cdot 8} \cdot v^2$

(2) $a = 6;\ b = \frac{1}{26 \cdot 6}$ $\quad f_2(v) = \frac{1}{3,6}v + \frac{1}{26 \cdot 6} \cdot v^2$

c) $f(v) = \frac{1}{3,6} \cdot v + \frac{1}{26 \cdot a} \cdot v^2$

Fahrrad:
$a = 3$
$v = 15\,\frac{km}{h}$
$f(v) \approx 7{,}1\,m$
Motorrad:
$a = 10$
$v = 25\,\frac{km}{h}$
$f(v) \approx 9{,}3\,m$
$v = 50\,\frac{km}{h}$
$f(v) \approx 23{,}5\,m$
Pkw:
$a = 8$
$v = 80\,\frac{km}{h}$
trocken:
$f(v) \approx 53{,}0\,m$
nass: $f(v) \approx 63{,}2\,m$
$v = 100\,\frac{km}{h}$
trocken:
$f(v) \approx 75{,}9\,m$
nass: $f(v) \approx 91{,}9\,m$
$v = 130\,\frac{km}{h}$
trocken:
$f(v) \approx 117{,}4\,m$
nass: $f(v) \approx 144{,}4\,m$

Graph zu b) und c):



d) Der Anteil des Reaktionsweges wird mit steigender Geschwindigkeit immer geringer.

5. a) Für den Pkw muss man den Bremsweg berechnen, für das Fahrrad den Anhalteweg.

$S_{B_{Pkw}} = \frac{15^2}{26 \cdot 8}\,m \approx 1{,}1\,m;$ $\qquad S_{A_{Fahrrad}} = \frac{15}{3,6}\,m + \frac{1}{26 \cdot 3} \cdot 15^2\,m \approx 7{,}1\,m$

Der Fahrradfahrer benötigt also mindestens 6 m Sicherheitsabstand.

b) Für den Pkw muss man den Bremsweg berechnen, für das Motorrad den Anhalteweg.

$S_{B_{Pkw}} = \frac{50^2}{26 \cdot 8}\,m \approx 12{,}0\,m;$ $\qquad S_{A_{Fahrrad}} = \frac{50}{3,6}\,m + \frac{1}{26 \cdot 10} \cdot 50^2\,m \approx 23{,}5\,m$

Der Motorradfahrer benötigt also mindestens 11,5 m Sicherheitsabstand.

2.6 Strategien zum Lösen quadratischer Gleichungen

80 **Einstieg:**

Jan hat richtig gerechnet.
Felix durfte für $x = 0$ nicht durch x dividieren. Dadurch hat er die Null nicht als Lösung erhalten.
Carina hat richtig gerechnet; allerdings ist der Weg von Jan einfacher.

81 **2.** **a)** $L = \{4; 2\}$ **b)** $L = \{0{,}5; -1\}$ **c)** $L = \{4{,}414; 1{,}586\}$ **d)** $L = \{0; -9\}$ **e)** $L = \{7\}$ **f)** $L = \{\ \}$

3. **a)** kein Element: $r < 0$; ein Element: $r = 0$; zwei Elemente: $r > 0$
b) kein Element: $r < 0$; ein Element: $r = 0$; zwei Elemente: $r > 0$
c) kein Element: $r < 0$; ein Element: $r = 0$; zwei Elemente: $r > 0$

82 **4.** **a)** $L = \{17; -11\}$ **b)** $L = \{1{,}2; -3{,}75\}$ **c)** $L = \{8\}$ **d)** $L = \{4; -13\}$ **e)** $L = \{0; -4\}$
f) $L = \{4{,}2; -15\}$ **g)** $L = \{4; 3\}$ **h)** $L = \left\{\frac{-(\sqrt{33}+5)}{2}; \frac{\sqrt{33}-5}{2}\right\}$ **i)** $L = \{-6{,}5; 8\}$ **j)** $L = \left\{\frac{8}{3}; -1{,}2\right\}$
k) $L = \{\ \}$ **l)** $L = \{\ \}$ **m)** $L = \{0; -7\}$ **n)** $L = \{0; -2{,}8\}$ **o)** $L = \{2{,}4\}$

5. Falsch: Er versucht die Gleichung wie eine des Typs $T_1 \cdot T_2 = 0$ zu lösen, da dieser Typ nicht vorliegt, ist der Ansatz falsch. Teile der Ausführung ebenso.
Richtig: $L = \{-\sqrt{5} + 2; \sqrt{5} + 2\}$.

6. **a)** $L = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$ **b)** $L = \left\{0; -\frac{16}{9}\right\}$ **c)** $L = \{15; 2\}$ **d)** $L = \left\{-\frac{7}{2}; -4\right\}$
e) $L = \{5; -11\}$ **f)** $L = \{2; -2\}$ **g)** $L = \left\{\frac{12}{5}; 0\right\}$ **h)** $L = \{8; 1\}$
i) $L = \left\{7; -\frac{13}{3}\right\}$ **j)** $L = \{8; 3\}$ **k)** $L = \left\{\frac{5}{2}; -2\right\}$ **l)** $L = \left\{\frac{7}{2}; -\frac{2}{7}\right\}$

7. –

8. **a)** Vorzeichenfehler $-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ als Lösung der Gleichung ergibt sich: $L = \{4; -1\}$.
b) Die Gleichung wurde nicht auf die Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht. Daraus ergibt sich ein Fehler im Wurzelterm. Dieser müsste lauten $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10}$.
Die richtige Lösung der Gleichung ist $L = \{\ \}$.
c) Beim Anwenden der pq-Formel wurden p und q in der Gleichung vertauscht. Als richtige Lösung ergibt sich: $L = \{-3\sqrt{2} - 5; 3\sqrt{2} - 5\}$.

82

9. gesuchte Zahl: x

a) $x^2 - 5x = 14$; $L = \{7; -2\}$ Die gesuchten Zahlen sind 7 und −2.

b) $x(x+6) = 7$; $L = \{1; -7\}$; Die gesuchten Zahlen sind 1 und −7.

$x(x+6) = -9$; $L = \{-3\}$; Die gesuchte Zahl ist −3.

$x(x+6) = -10$; $L = \{\ \}$; Die gesuchte Zahl existiert nicht.

c) $9x^2 = (x+25)^2$; $L = \{-6{,}25; 12{,}5\}$

Die gesuchten Zahlen sind −6,25 und 12,5.

10. *Voraussetzungen:*

- Die Gleichung muss die Form $x^2 - px + q = 0$ haben.
- $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ muss größer 0 sein.

11. a) Beim Teilen einer Gleichung durch die Variable muss auch der Fall, dass die Variable 0 ist, untersucht werden. Somit bietet sich 0 als zweite Lösung an. Dies wurde bei der Hausaufgabe vergessen. Die richtige Lösung der Gleichung ist: $L = \left\{\frac{2}{7}; 0\right\}$.

b) Für die pq-Formel muss die Gleichung in die Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht werden. Die richtige Lösungsmenge ist $L = \left\{-1 - \sqrt{7};\ -1 + \sqrt{7}\right\}$.

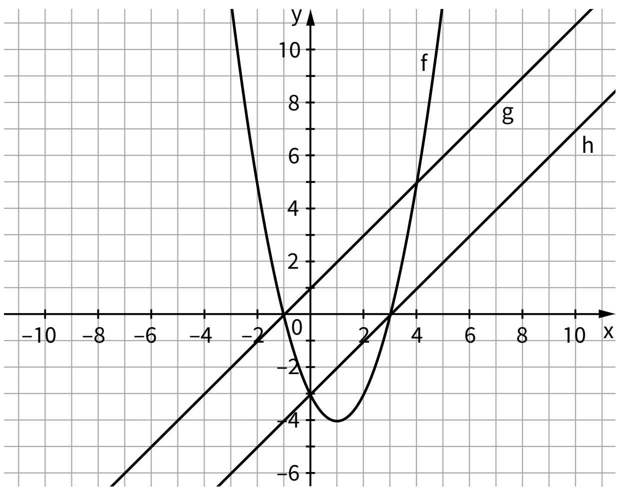
2.7 Linearfaktorzerlegung quadratischer Terme

83

Einstieg:

a) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
$= (x+1)(x-3)$
$= x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = (x - m)(x - n)$
m und n sind die Nullstellen der Funktion f.



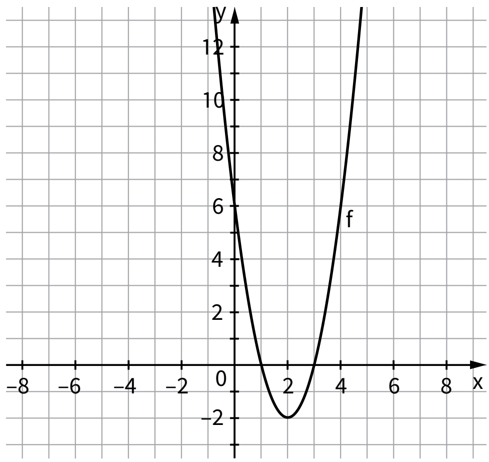
85

2. **a)** $f(x) = 2(x-1)(x-3)$

$\quad = 2x^2 - 8x + 6$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

$\quad = -2(x+1)(x-3)$



3. **a)** $f(x) = (x-2)(x-5)$

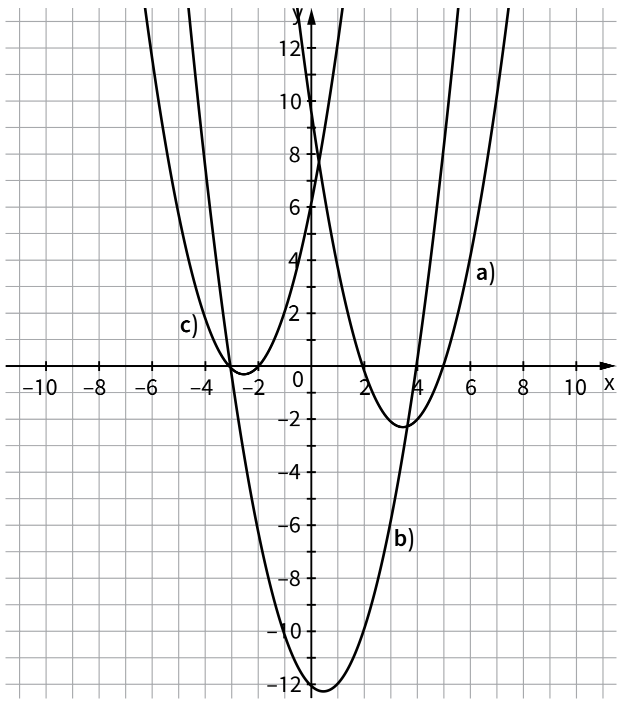
$\quad = x^2 - 7x + 10$

b) $f(x) = (x+3)(x-4)$

$\quad = x^2 - x - 12$

c) $f(x) = (x+2)(x+3)$

$\quad = x + 5x + 6$

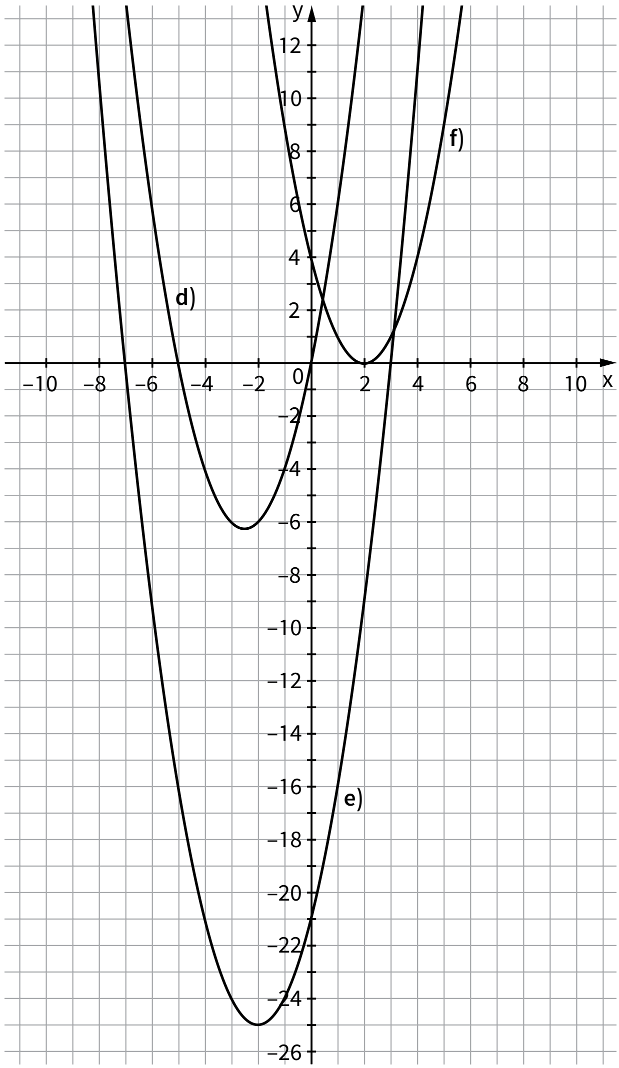


85

3. **d)** $f(x) = x(x + 5)$
$= x^2 + 5x$

e) $f(x) = (x - 3)(x + 7)$
$= x^2 + 4x - 21$

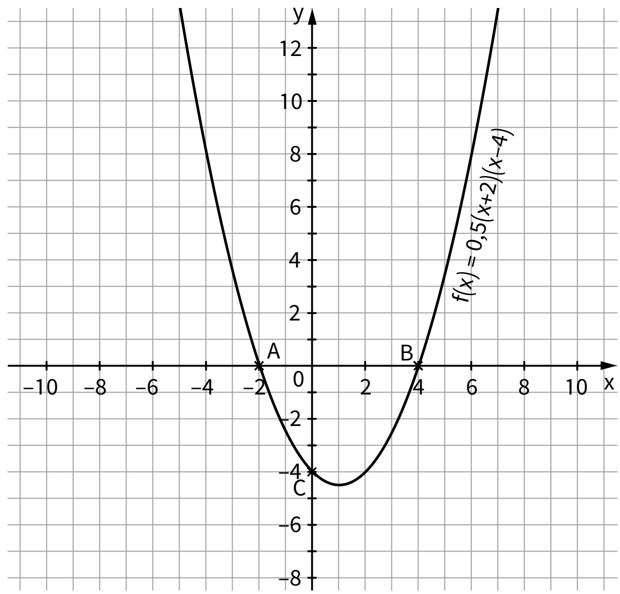
f) $f(x) = (x - 2)^2$
$= x^2 - 4x + 4$



4. **a)** $f(x) = x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$
b) $g(x) = x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$
c) $h(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
d) $k(x) = x^2 - 8x = x(x - 8)$
e) $f(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$
f) $g(t) = t^2 - 9t + 20 = (t - 5)(t - 4)$

85

5. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$



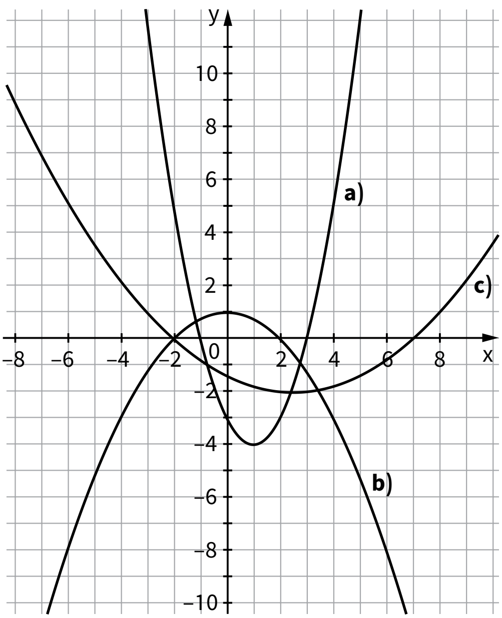
6. $f(x) = 2(x-2)(x-5)$ $\quad h(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-6)$

$g(x) = -1(x+4)(x+1)$ $\quad i(x) = \frac{1}{2}(x-8)(x-10)$

7. a) $f(x) = (x+1)(x-3)$
$= x^2 - 2x - 3$
$= (x-1)^2 - 4$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-2)$
$= -\frac{1}{4}x^2 + 1$

c) $f(x) = 0{,}1\,(x+2)(x-7)$
$= 0{,}1\,x^2 - 0{,}5\,x - 1{,}4$
$= 0{,}1\,(x-2{,}5)^2 - 2{,}025$

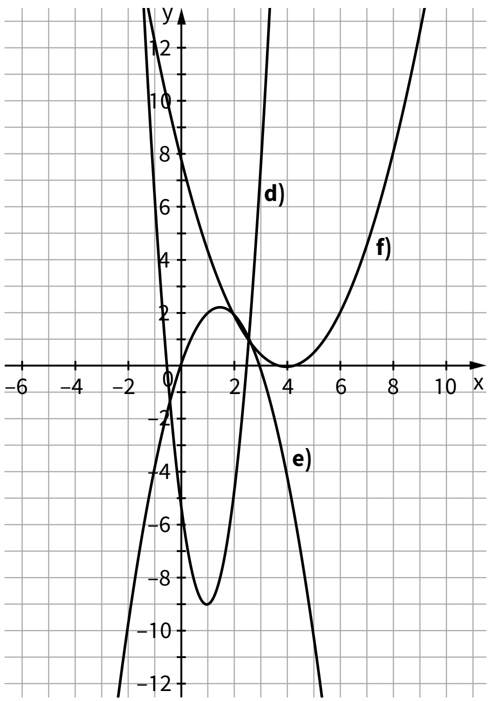


85

7. d) $f(x) = 4(x+0{,}5)(x-2{,}5)$
$= 4x^2 - 8x - 5$
$= 4(x-1)^2 - 9$

e) $f(x) = -x(x-3)$
$= -x^2 + 3x$
$= -(x-1{,}5)^2 + 2{,}25$

f) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$
$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
$= \frac{1}{2}(x-4)^2$



8. a) $f(x) = (x-3)(x-7)$
b) $f(x) = (x+3)(x-6)$
c) $f(x) = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$
d) $f(x) = (x+5)(x-0) = x(x+5)$

86

9. a) Der Vorfaktor ist falsch und die Funktionsgleichung ist nicht in der Linearfaktorzerlegung angegeben. Richtig ist:
$f_1(x) - 0{,}25(x-1)^2 + 4 = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75 = -0{,}25x^2(x+3)(x-5)$

b) Die Vorzeichen sind falsch. Richtig ist: $f_2(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x-4) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

c) Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist das Vorzeichen des Vorfaktors falsch. Richtig ist:
$f_3(x) = (x+0{,}5)(x-1{,}5) = x^2 - x - 0{,}75$

10. a) $f(x) = 2(x-3)(x+1) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x-1)^2 - 8$
b) $g(x) = -0{,}5(x-2)(x-4) = -0{,}5x^2 + 3x - 4 = -0{,}5(x-3)^2 + 0{,}5$
c) $h(t) = \left(\frac{1}{4}\right)(t+8)(t-4) = \left(\frac{1}{4}\right)t^2 + t - 8 = \left(\frac{1}{4}\right)(t+2)^2 - 9$
d) $f(s) = \frac{3}{4}(s-5)(s+1) = \frac{3}{4}s^2 - 3s - \frac{15}{4} = \frac{3}{4}(s-2)^2 - \frac{27}{4}$
e) $g(r) = -0{,}2(r+9)(r-4) = -0{,}2r^2 - r + 7{,}2 = -0{,}2(r+2{,}5)^2 + 8{,}45$
f) $h(a) = -1\frac{1}{4}\left(a - \frac{3}{10}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}a^2 + a - \frac{3}{16} = -1\frac{1}{4}\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{80}$

86

11. $f(x) = \frac{1}{3}(x+9)(x-3)$

$g(x) = -0{,}75(x+6)(x+1)$

$h(x) = -\frac{1}{2}(x-3{,}75)^2 + 7$

$i(x) = 4(x-2)^2 + 1$

Man verwendet die Scheitelpunktform, wenn man den Scheitelpunkt der Funktion gut ablesen kann Die Linearfaktorzerlegung verwendet man, wenn man die Nullstellen gut ablesen kann.

12. a) Die Aussage ist wahr.

b) Die Aussage ist falsch. Man kann die Funktionsgleichung einer Parabel, die keine Nullstellen besitzt nicht in Linearfaktoren zerlegen.

c) Die Aussage ist falsch. Sie stimmt nicht, wenn die Nullstellen den Abstand 0 haben, also doppelte Nullstellen sind. Wenn die Nullstellen der Parabeln einen Abstand größer 0 haben, ist die Aussage richtig.

d) Die Aussage ist wahr.

e) Die Aussage ist wahr.

13. a) **(1)** $f_1(x) = (x-2)^2 - 4 = x(x-4)$

(2) $f_2(x) = -(x+1)^2 + 9 = -(x+4)(x-2)$

(3) $f_3(x) = -\frac{7}{9}(x-1)(x-7)$

(4) $f_4(x) = -1{,}5(x+4{,}5)(x-3{,}5)$

b) Der x-Wert des Scheitelpunktes liegt genau in der Mitte der Summe der x-Werte der Nullstellen.

c) Für den Funktionsterm gilt $a(x-m)(x-n)$.

Durch Umformen erhält man:

$$
\begin{aligned}
&a(x-m)(x-n) && |\text{Ausmultiplizieren}\\
&= a(x^2 - mx - nx + mn) &&\\
&= a(x^2 - (m+nx) + mn) && |\text{quadratische Ergänzung}\\
&= a\left(x^2 - (m+nx) + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+n}{2}\right)^2\right) &&\\
&= a\left(\left(x - \frac{m+n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(m^2+n^2) + \frac{1}{2}mn\right) && |\text{mit a ausmultiplizieren}\\
&= a\left(x - \frac{m+n}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}(m^2+n^2) + \frac{a}{2}mn &&\\
&= a\left(x - \frac{m+n}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}(m^2 - 2\,mn + n^2) &&\\
&= a\left(x - \frac{m+n}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}(m^2 - n^2) &&
\end{aligned}
$$

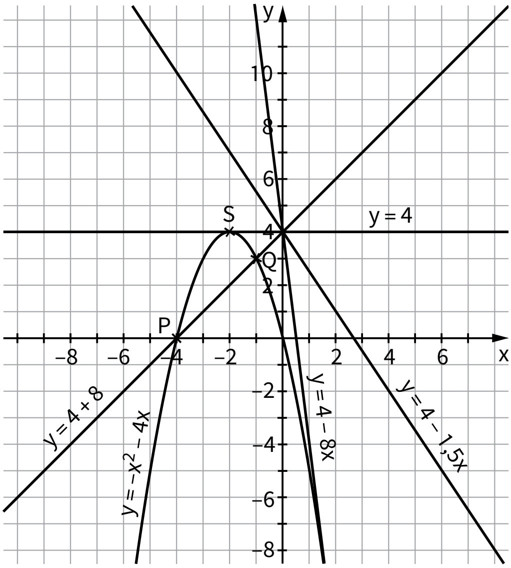
Aus der Scheitelpunktform erhält man den Scheitelpunkt $S\left(\frac{m+n}{2} \middle| \frac{a}{4}(m-n)^2\right)$.

2.8 Schnittpunkte von Parabeln und Geraden

87 **Einstieg:**

Der rechnerische Ansatz $-x^2 - 4x = 4 + x$ führt zu den beiden Schnittpunkten $P(-4\,|\,0)$ und $Q(-1\,|\,3)$. Möglich sind die folgenden drei Fälle:

1. Es gibt zwei Schnittpunkte für $y = 4 + mx$ mit $m > 0$.
2. Es gibt genau einen Schnittpunkt. Die Gerade berührt bzw. schneidet die Parabel in einem Punkt für $y = 4 + mx$ mit $m = 0$ oder $m \leq -8$.
3. Es gibt keinen Schnittpunkt für $y = 4 + mx$ mit $0 > m > -8$.



88 **2.** **a)** –

b) **(1)** $x \approx -2{,}30$ $x \approx 1{,}30$, also $L \approx \{-2{,}3;\ 1{,}3\}$

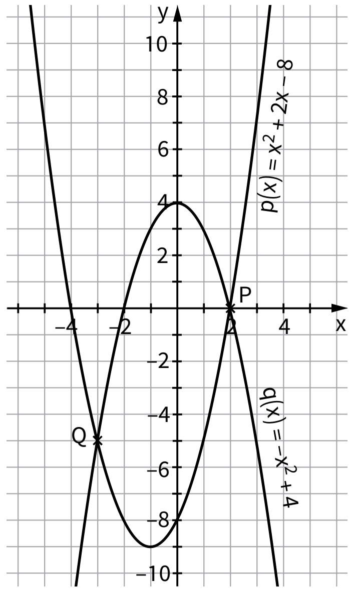
(2) $x \approx 0{,}56$ und $x \approx -3{,}56$, also $L \approx \{-3{,}56;\ 0{,}56\}$

(3) $x = 2$, also $L \approx \{2\}$

(4) $L = \{\ \}$

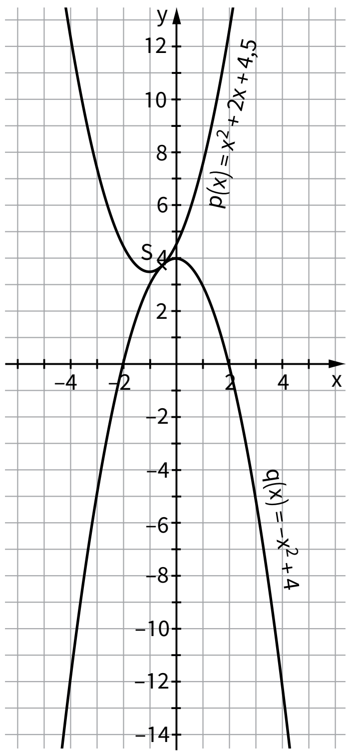
88

3. a) Ja, es gibt gemeinsame Schnittpunkte bei P (2 | 0) und Q (−3 | −5).

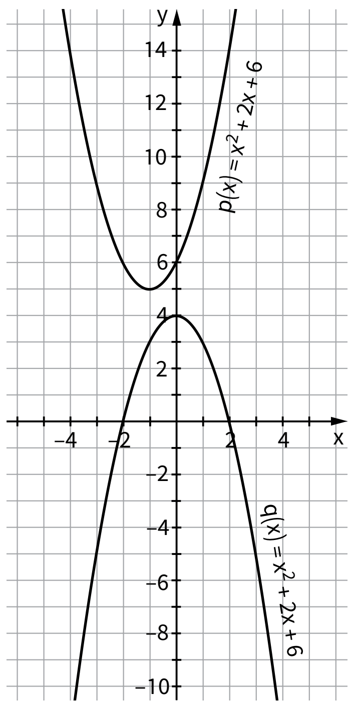


b) Siehe Information auf Seite 88 des Schülerbandes

1 Schnittpunkt

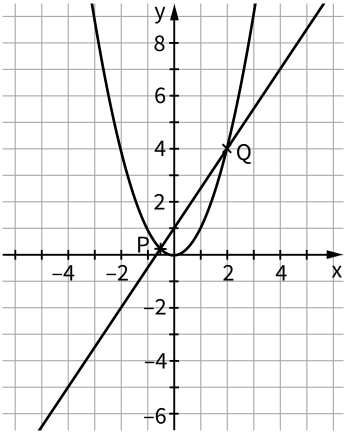


Kein Schnittpunkt

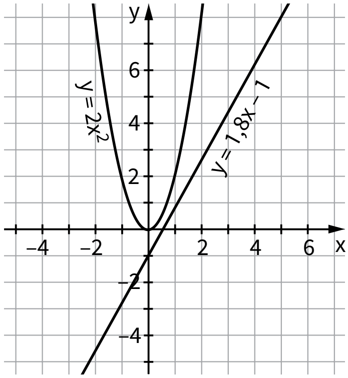


88

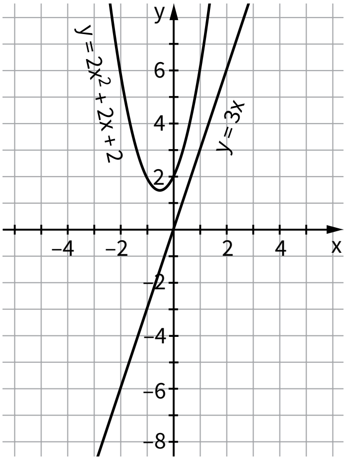
4. **a)** P (– 0,5 | 0,25) und Q (2 | 4)



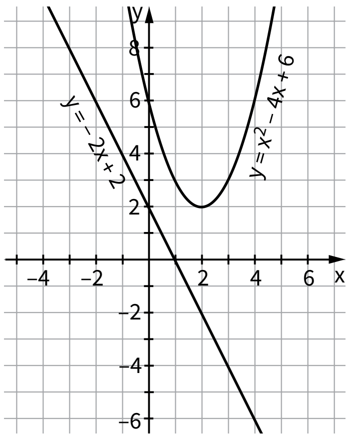
b) L = { }



c) L = { }

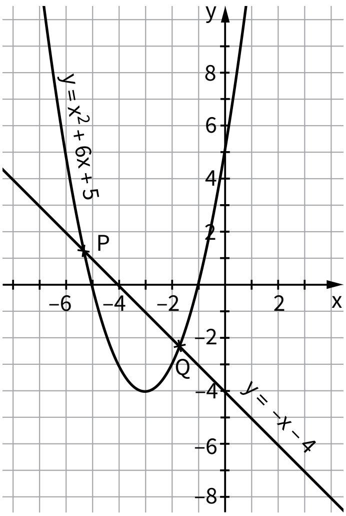


d) L = { }

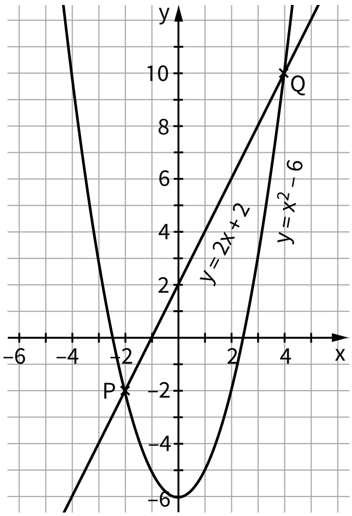


88

4. e) $P\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{7}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)$ und
$Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{7}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{1}{2}\right)$
$P(\approx -5{,}3\,|\approx 1{,}3)$ und
$Q(\approx -1{,}70\,|\approx -2{,}30)$



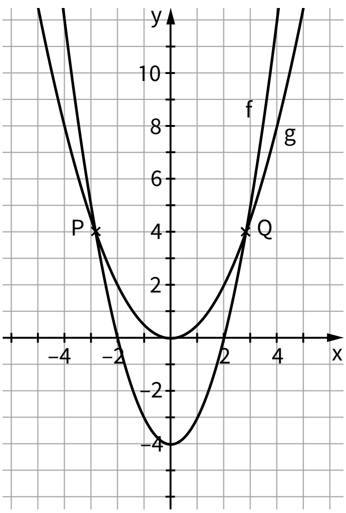
f) $P(-2\,|-2)$ und $Q(4\,|\,10)$



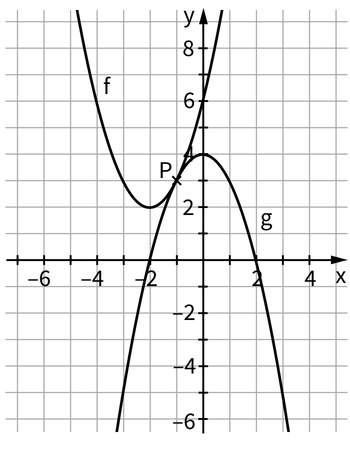
89

5. a) $x^2 - 0{,}5\,x - 1{,}5 = 0$ $\quad L = \{-1;\,1{,}5\}$
b) $x^2 + 2\,x + 1{,}5 = 0$ $\quad L = \{\ \}$
c) $x^2 - 2\,x + 1 = 0$ $\quad L = \{1\}$

6. a) $P(-2{,}83\,|\,4)$ und $Q(2{,}83\,|\,4)$

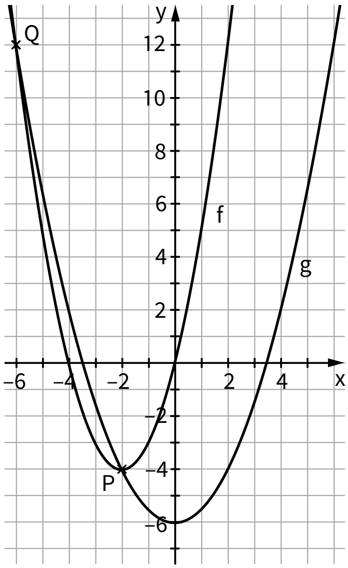


b) $P(-1\,|\,3)$

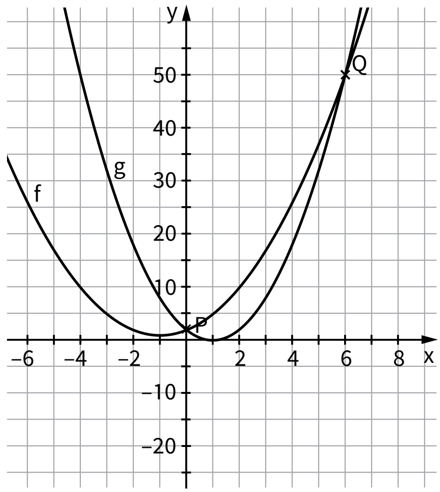


89

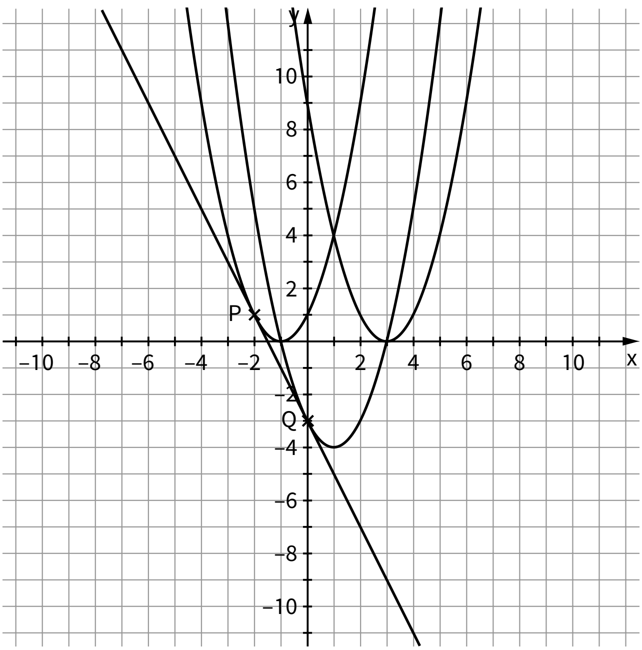
6. c) P(−2|−4) und Q(−6|12)



d) P(0|2) und Q(6|50)

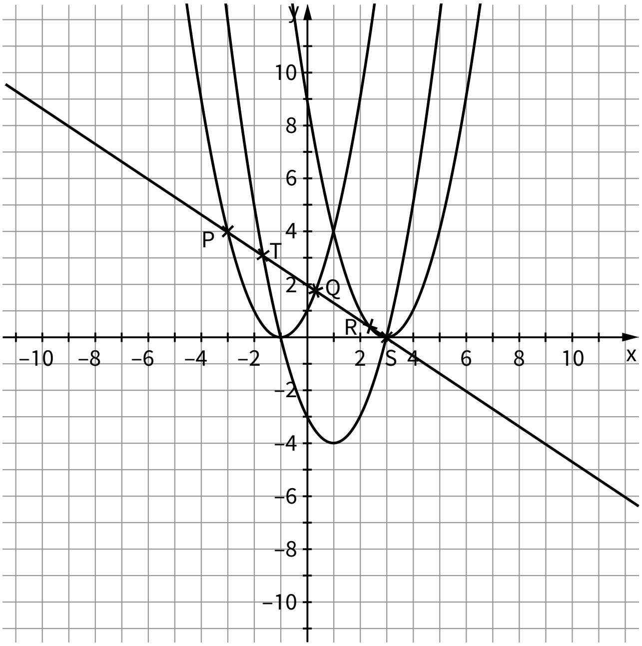


7. a) (**1**) P(−2|1)
(**2**) Kein Schnittpunkt
(**3**) Q(0|−3)

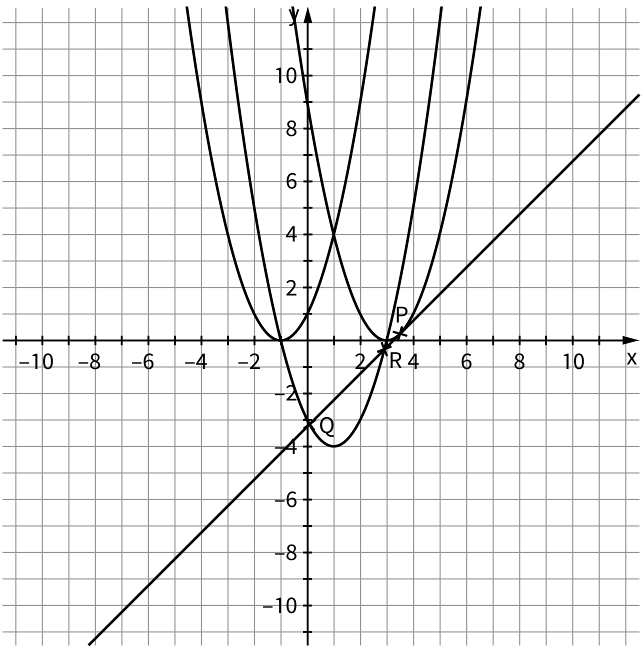


89

7. b) **(1)** $P(-3|4)$ und $Q\left(\frac{1}{3}\middle|1\frac{7}{9}\right)$
(2) $R\left(2\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{9}\right)$ und $S(3|0)$
(3) $T\left(1\frac{2}{3}\middle|3\frac{1}{9}\right) \approx T(1{,}67|3{,}11)$



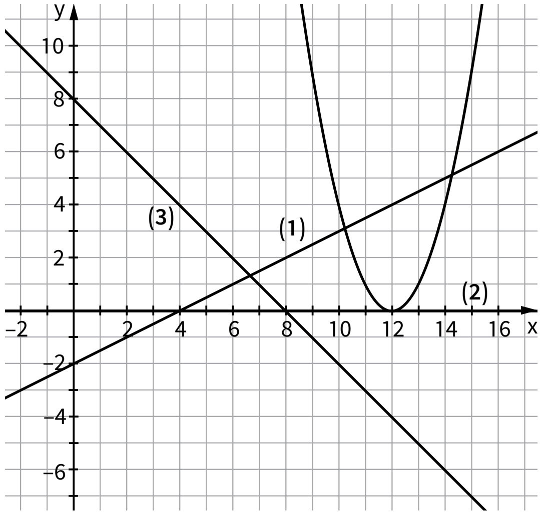
c) **(1)** Kein Schnittpunkt
(2) $P(3{,}5|0{,}25)$
(3) $Q\left(1{,}5-\sqrt{2}\,\middle|-1{,}75-\sqrt{2}\right) \approx Q(0{,}09|-3{,}16)$
$R\left(1{,}5+\sqrt{2}\,\middle|-1{,}75+\sqrt{2}\right) \approx R(2{,}91|-0{,}34)$



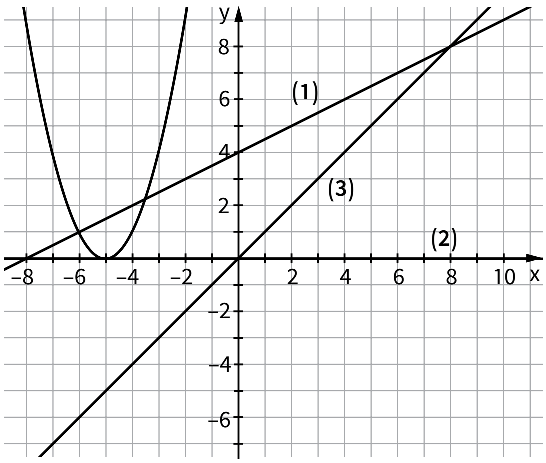
89

8. *Beispiele:*

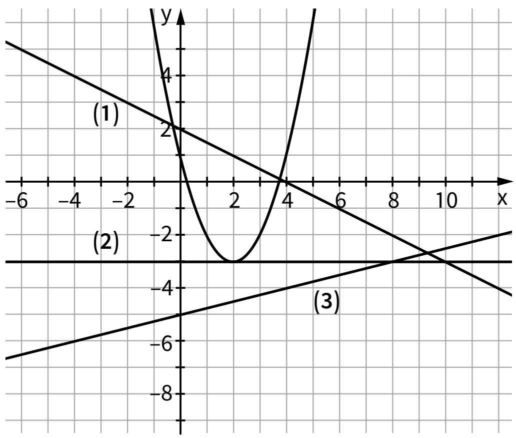
a) **(1)** $g(x) = 0{,}5x - 2$
(2) $g(x) = 0$
(3) $g(x) = -x + 8$



b) **(1)** $g(x) = 0{,}5x + 4$
(2) $g(x) = 0$
(3) $g(x) = x$

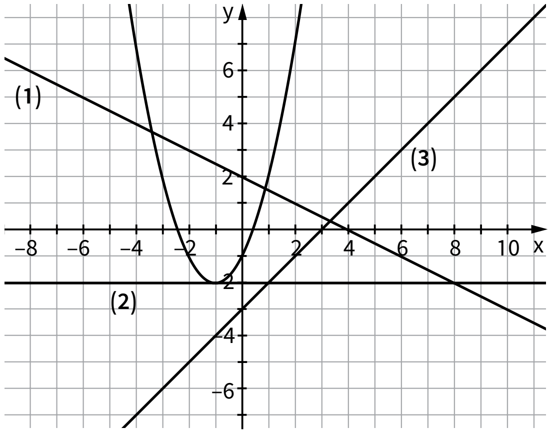


c) **(1)** $g(x) = 0{,}5 + 2$
(2) $g(x) = -3$
(3) $g(x) = -0{,}25x - 5$



89

8. d) (1) $g(x) = -0{,}5x + 2$
(2) $g(x) = -2$
(3) $g(x) = x - 3$



9. a) Die Funktionen werden den Bildern von oben links beginnend bis unten rechts zugeordnet.
Dann ergibt sich die Reihenfolge: (4), (1), (2), (3), (6), (5) d. h. Zum Bild oben links gehört Funktion (4), zum Bild daneben Funktion (1), usw.

b) Die Schnittstellen und damit die Lösungen der Gleichungen sind immer $x = -6$ und -2. Das liegt daran, dass sich alle Gleichungen in eine Form bringen lassen: $x^2 + 8x + 12 = 0$.
Lediglich die y-Koordinaten des Schnittpunktes sind voneinander verschieden:

(1) $P(-6|4)$ und $Q(-2|4)$
(2) $P(-2|4)$ und $Q(-6|36)$
(3) $P(-6|-12)$ und $Q(-2|-12)$
(4) $P(-6|48)$ und $Q(-2|16)$
(5) $P(-6|0)$ und $Q(-2|0)$
(6) $P(-6|1)$ und $Q(-2|1)$

Im Blickpunkt: Goldener Schnitt

90

1. –

2. –

3. $x \approx 34{,}38$; $90 - x \approx 55{,}62$

91

4. a) (1) $x \approx 6{,}18\,\text{cm}$; $y \approx 3{,}82\,\text{cm}$
(2) $s \approx 12{,}94\,\text{cm}$; $y \approx 4{,}94\,\text{cm}$
(3) $s \approx 7{,}85\,\text{cm}$; $x \approx 4{,}85\,\text{cm}$

b) $\frac{s-x}{x} = \frac{x}{s}$ mit $x > 0$, $s > 0$

$0 = x^2 + 5x - s^2$

$x = \frac{s}{2} \cdot \left(-1 + \sqrt{5}\right)$ daraus folgt:

$\frac{s}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

c) –

91

5. Wir wählen $\overline{BH} = 1$.
Nach Konstruktion ist $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BH} = 2$.
Daher ist für $\overline{AH} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$.
$\overline{HF} = \overline{BH} = 1$, damit gilt $\overline{AF} = \overline{AH} - \overline{HF} = \sqrt{5} - 1$, daraus folgt
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$; das Verhältnis des goldenen Schnittes.

6. –

2.9 Modellieren – Anwenden von quadratischen Gleichungen

93

1. $x^2 = 1{,}8(2 - x)$ mit $0 < x < 1{,}8$;
$L = \{-3; 1{,}2\}$
Die Quadratseite ist 1,2 cm lang.

2. a) (1) $\frac{1}{2}x(x-3) = 44$ mit $x > 0$; $L = \{-8; 11\}$
Das Vieleck hat 11 Seiten.
(2) $\left[\frac{1}{2}x(x-3) = 35 \text{ mit } x > 0; \quad L = \{-7; 10\}\right]$
Das Vieleck hat 10 Seiten
(3) $\left[\frac{1}{2}x(x-3) = 135 \text{ mit } x > 0; \quad L = \{-15; 18\}\right]$
Das Vieleck hat 18 Seiten.
b) $\frac{1}{2}x(x-3) + x = 120$ mit $x > 0$; $L = \{-15; 16\}$

3. a) $(x+1)^3 = x^3 + 127$ mit $x > 0$; $L = \{-7; 6\}$
Die ursprüngliche Seitenlänge betrug 6 cm.
b) $6(2x+1)^2 = 6x^2 + 576$ mit $x > 0$; $L = \left\{-\frac{19}{3}; 5\right\}$
Die ursprüngliche Seitenlänge betrug 5 cm.

4. a) (1) $(6-x)(5-x) = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 5$ mit $0 < x < 5$; $L = \{1; 10\}$
Die neuen Seitenlängen sind 5 cm und 4 cm.
(2) $[(6+x)(5+x) = 3 \cdot 6 \cdot 5$ mit $x > 0$; $L = \{-15; 4\}]$
Die neuen Seitenlängen sind 10 cm und 9 cm.
b) (1) $2(6+x) + 2(5+y) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1$, also $y = \frac{1}{2} - x$
Für den Flächeninhalt erhält man: $(6+x)(5+y) = 30$, also
$(6+x)\left(\frac{11}{2} - x\right) = 30$; $L = \{-2; 1{,}5\}$
Man kann die längere Seite um 2 cm verkürzen und die kürzere Seite um 2,5 cm verlängern, oder man kann die längere Seite um 1,5 cm verlängern und die kürzere um 1 cm verkürzen.
In beiden Fällen erhält man für die neuen Seitenlängen 4 cm und 7,5 cm.

93

4. b) (2) $2(6+x)+2(5+y)=2\cdot 6+2\cdot 5+\frac{1}{3}$, also $y=\frac{1}{6}-x$

Für den Flächeninhalt erhält man: $(6+x)(5+y)=30$, also $(6+x)\left(\frac{31}{6}-x\right)=30$; $L=\left\{-1{,}5; \frac{2}{3}\right\}$

Man kann die längere Seite um 1,5 cm verkürzen und die kürzere um $\frac{5}{3}$ cm verlängern, oder man kann die längere Seite um $\frac{2}{3}$ cm verlängern und die kürzere um $\frac{1}{2}$ cm verkürzen.

In beiden Fällen erhält man für die neuen Seitenlängen 4,5 cm und $6\frac{2}{3}$ cm.

5. a) (1) $x^2=5x+14$ mit $x>0$; $L=\{-2; 7\}$

Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 7 cm.

(2) $x^2=5x+24$ mit $x>0$; $L=\{-3; 8\}$

Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 8 cm.

b) (1) $2x^2+20x=48$ mit $x>0$; $L=\{-12; 2\}$

(2) $2x^2+20x=288$ mit $x>0$; $L=\{-18; 8\}$

(3) $2x^2+20x=112$ mit $x>0$; $L=\{-14; 4\}$

Antwort: Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 2 cm [8 cm; 4 cm].

6. a) $x\left(\frac{23}{2}-x\right)=30$; $L=\{4; 7{,}5\}$ $x>0$

Die Seitenlängen sind 4 cm und 7,5 cm.

b) $x(x-1{,}2)=17{,}28$; $L=\{-3{,}6; 4{,}8\}$ $x>0$

Die Seitenlängen sind 4,8 cm und 3,6 cm lang.

7. $2x(x-5)=x^2+24$ mit $x>0$; $L=\{-2; 12\}$

Die Seitenlänge beträgt 12 cm.

8. Anzahl der Teilnehmer: x

Anzahl der Handklatscher: $1+2+3+\ldots+(x-1)=\frac{x(x-1)}{2}$

Für $\frac{x(x-1)}{2}=325$ erhält man $L=\{-25; 26\}$

Da $x>0$ ist, folgt $x=26$

Es sind 26 Teilnehmer.

94

9. $x^2+(4-x)(3-x)=7$; $L=\{1; 2{,}5\}$

Die Quadratseite kann entweder 1 m oder 2,5 m lang sein. Da aber die Quadratseite kürzer als die Rechteckseite sein soll $(x<4-x$ und $x<3-x)$ kommt nur $x=1$ m als Lösung in Frage.

10. a) $(5-x)^2+x^2=17{,}62$; $L=\left\{\frac{9}{10}; \frac{41}{10}\right\}$

b) $(5-x)^2+2x^2=17{,}32$; $L=\left\{\frac{6}{5}; \frac{32}{15}\right\}$

c) $(5-2x)^2+4x^2=14{,}92$; $L=\left\{\frac{7}{10}; \frac{9}{5}\right\}$

94

11. $\frac{1}{2}n(n-1) = 78$ mit $n > 0$; $L = \{-12; 13\}$
Die Anzahl der Geraden beträgt 13.

12. (1) $u \cdot v = 50$; $u^2 = 2a^2$ und $v^2 = 2(10-a)^2$, also $10a - a^2 = 25$; $L = \{5\}$
P halbiert die Seite des Quadrats.
Seitenlängen: $u = \sqrt{50}\,\text{cm} \approx 7{,}1\,\text{cm}$; $v = \sqrt{50}\,\text{cm} \approx 7{,}1\,\text{cm}$
(2) $u \cdot v = 25$; $u^2 = 2a^2$ und $v^2 = 2(10-a)^2$, also $10a - a^2 = 12{,}5$;
$L = \left\{5 + \sqrt{12{,}5};\ 5 - \sqrt{12{,}5}\right\}$
P ist ungefähr 1,5 cm von A entfernt.
Seitenlängen: $u = \left(75 - 20\sqrt{12{,}5}\right)\text{cm} \approx 2{,}1\,\text{cm}$;
$v = \left(75 + 20\sqrt{12{,}5}\right)\text{cm} \approx 12{,}1\,\text{cm}$

13. a) $119 - x = x \cdot \left(1 + \frac{119 - x}{100}\right)$
$x \approx 43{,}14$
Das Pferd hat ungefähr 43 Reichsthaler gekostet.
b) $(p \cdot 10p) \cdot \frac{2p}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2\frac{2}{9} = p$
$p = 15$
Es sind 15 Kaufleute.

2.10 Optimierungsprobleme mit quadratischen Funktionen – Lösungsstrategien

95

Einstieg:
Sei $f(x) = (8 - 0{,}5x)(200 + 20x)$ die Funktion, die welche die Einnahmen in Abhängigkeit der Anzahl der Besucher beschreibt.
Ein genaues Verfahren zur Ermittlung dieser Gleichung wird analog in Bezug auf einen anderen Sachkontext auf der Seite 95 im Schülerband vorgestellt.
Eine genauere Untersuchung ergibt, dass diese Funktion bei $x = 3$ und $f(x) = 1690$ ein Maximum aufweist. Bezogen auf den vorliegenden Sachkontext bedeutet dies, dass eine Senkung des Eintrittspreises um 1,50 Euro auf 6,50 Euro zur Folge hätte, dass 60 Besucher mehr kämen, also 260. Somit steigt die Gesamteinnahme dann auf $6{,}50\,€ \cdot 260 = 1690\,€$.

97

2. a) –
b) (1) Kleinster Funktionswert: $y = -3{,}125$
(2) Größter Funktionswert: $y = \frac{1}{3}$
(3) Größter Funktionswert: $y = 4$
(4) Kleinster Funktionswert: $y = -7{,}25$
(5) Größter Funktionswert: $y = 11$
(6) Kleinster Funktionswert: $y \approx -3{,}15$

97

3. Die Funktion, die in Abhängigkeit von der Preisänderung in Euro den Prozess beschreibt, lautet $f(x) = (50 - x)(600 + 20x)$. Sie hat das Maximum bei $x = 10$ und $y = 32\,000$. Also ist der optimale Preis 40 Euro und die maximalen Einnahmen betragen 32 000 €.

4. Die Funktion, die diesen Prozess beschreibt, lautet:
$f(x) = (60 - x)(5\,000 + 200x) - 20\,000 - 10(5\,000 + 200x)$
Ihr Maximum liegt bei $x = 12{,}5$ und $y = 261\,250$.
Der für den Verlag günstigste Preis wäre 47,50 Euro.

98

5. **a)** z. B. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 9$
b) z. B. $f(x) = x^2 + 30$

6. **a)** $4{,}25 = (9 - x)x$, also $x = 8{,}5$
b) $11{,}25 = (9 - x)x$, also $x = 1{,}5$ und $x = 7{,}5$.
Die Seitenlängen müssen zwischen 1,5 und 7,5 cm liegen.
c) Das Maximum liegt bei $x = 4{,}5$ cm. Dann liegt ein Quadrat vor.

7. Für die Zahl 0,25 ist der Term $x \cdot (2x - 1)$ minimal.

8. Term $f(x) = 40 - 4 \cdot \frac{(8 - x)x}{2}$.
Maximum bei $x = 4$ und $y = 8$.

9. Die gesuchte Seitenlänge beträgt $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$.
Der Flächeninhalt des inneren Quadrates beträgt dann genau $\frac{1}{2} \cdot a^2$.

10. Betrachtet wird die Funktion für den Flächeninhalt des Rechteckes, dessen Größe maximal werden soll: $f(x) = x\left(-\frac{6}{5}x + 4\right)$.
Diese hat ihr Maximum bei $x = 1\frac{2}{3}$.
Der gesuchte Punkt ist daher $P\left(1\frac{2}{3} \middle| 2\right)$.

11. Dazu wird die Differenzfunktion $f_2(x) - f_1(x)$ gebildet:
$d(x) = x^2 - 4x + 7 - 2x - 3 = x^2 - 6x - 4$
Die Differenzfunktion hat ihr Minimum an der Stelle $x = 3$. Dies ist die Stelle, an der sich die Funktionswerte am wenigsten voneinander unterscheiden.
Sie unterscheiden sich dort um $f_2(3) - f_1(3) = 4 - 3 = 1$.

12. Hier wird erneut eine Differenzfunktion $f_1(x) - f_2(x)$ verwendet:
$d(x) = -0{,}1x^2 + x - 0{,}5x = -0{,}1x^2 + 0{,}5x$
Diese hat ihr Maximum an der Stelle $x = 2{,}5$. Die gesuchte Parallele zur y-Achse hat also die Gleichung $x = 2{,}5$.

2.11 Methode der Substitution – Biquadratische Gleichungen

99 **Einstieg:**

x = Länge einer Kathete

$x^2 + \left(\frac{240}{x}\right)^2 = 26^2$

$x = 24$ oder $x = 10$ oder $x = -10$ oder $x = -24$

Die Katheten sind 24 cm und 10 cm lang.

100 **1. a)** $(x^2 - 5)^2 = 16$: $L = \{-3; -1; 3; 1\}$

$(x^2 - 4)^2 = 16$: $L = \{-2 \cdot \sqrt{2};\ 0;\ 2 \cdot \sqrt{2}\}$

$(x^2 - 3)^2 = 16$: $L = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

$(x^2 + 4)^2$: $L = \{0\}$

$(x^2 + 5)^2$: $L = \{\ \}$

b) Jede biquadratische Gleichung kann durch Substitution in eine quadratische Gleichung umgewandelt werden. Diese hat höchstens zwei Lösungen. Aus jeder ihrer Lösungen erhält man beim Resubstituieren höchstens zwei Lösungen der biquadratischen Gleichungen, also insgesamt höchstens $2 \cdot 2 = 4$ Lösungen.

2. a) $L = \{-10; 10\}$; $L = \{-0{,}3; 0{,}3\}$

b) $L = \{0\}$; $L = \{-1; 0; 1\}$

c) $L = \{-1; -5\}$; $L = \{-5\}$

d) $L = \{0\}$; $L = \{4; 0; -4\}$

3. a) $L = \{5; 0; -5\}$; $L = \{0{,}2; 0; -0{,}2\}$

b) $L = \{-3; -1; 1; 3\}$; $L = \{-\sqrt{15}; -1; \sqrt{15}; 1\}$

c) $L = \{-3; -2; 2; 3\}$; $L = \{\ \}$

d) $L = \{-5; 5\}$; $L = \{-5; -1; 1; 5\}$

4. a) biquadratisch: $L = \{-3; 0; 3\}$

b) nicht biquadratisch: $L = \{-1{,}886; 1{,}32\}$

c) nicht biquadratisch: $L = \{-2; 0; 3\}$

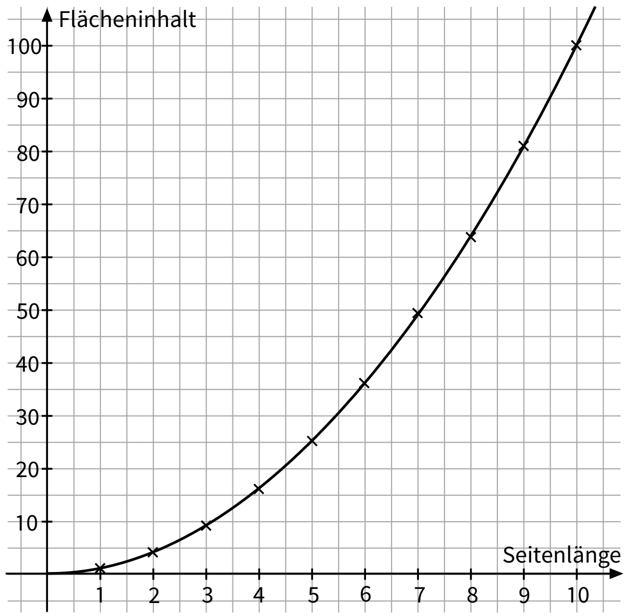
d) biquadratisch: $L = \{-2; -1; 1; 2\}$

2.12 Quadratwurzelfunktion – Umkehrfunktion

101 **Einstieg:**

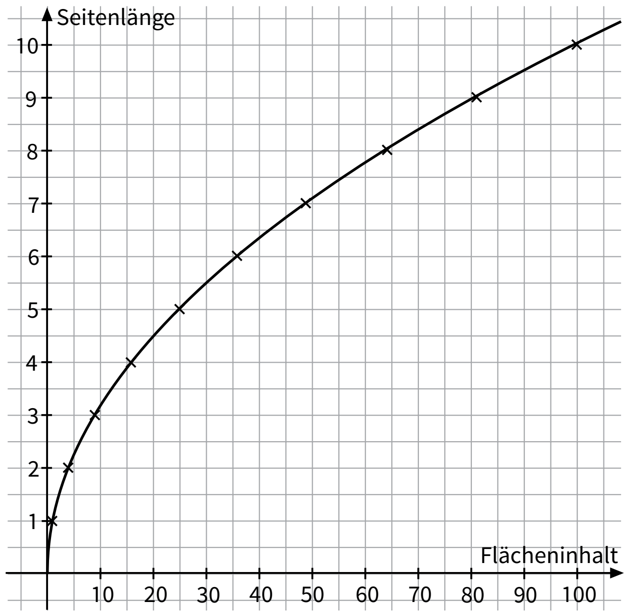
(1)

Seitenlänge	Flächeninhalt
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100



(2)

Flächeninhalt	Seitenlänge
100	10
81	9
64	8
49	7
36	6
25	5
16	4
9	3
4	2
1	1



Die Funktionen (**1**) und (**2**) entstehen auseinander durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden (bei gleicher Achseneinteilung) mit der Gleichung $y = x$.

105

3. a)

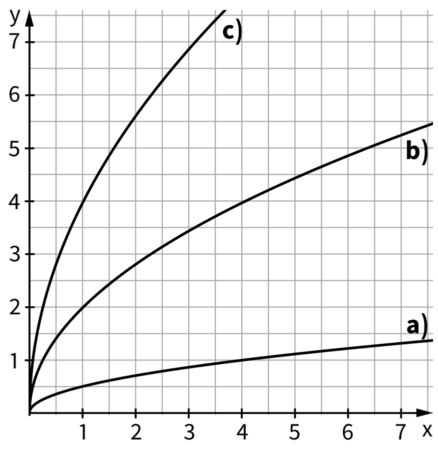
$x\left(\text{in } \frac{km}{h}\right)$	$y_{(1)}$ (in m)	$y_{(2)}$ (in m)	$y_{(3)}$ (in m)
10	0,9	1,3	0,8
20	3,6	5,2	3,2
30	8,1	11,7	7,2
40	14,4	20,8	12,8
50	22,5	32,5	20,0
60	32,4	46,8	28,8
70	44,1	63,7	39,2
80	57,6	83,2	51,2

b) **(1)** $47{,}1\,\frac{km}{h}$ $\left[52{,}7\,\frac{km}{h};\ 57{,}7\,\frac{km}{h}\right]$ (gerundet)
(2) $39{,}2\,\frac{km}{h}$ $\left[43{,}9\,\frac{km}{h};\ 48\,\frac{km}{h}\right]$ (gerundet)
(3) $50\,\frac{km}{h}$ $\left[55{,}9\,\frac{km}{h};\ 61{,}2\,\frac{km}{h}\right]$ (gerundet)

4. Umkehrbar sind nur die Funktionen zu den Graphen in a) und in b), da nur hier zu jedem y-Wert genau ein x-Wert gehört.

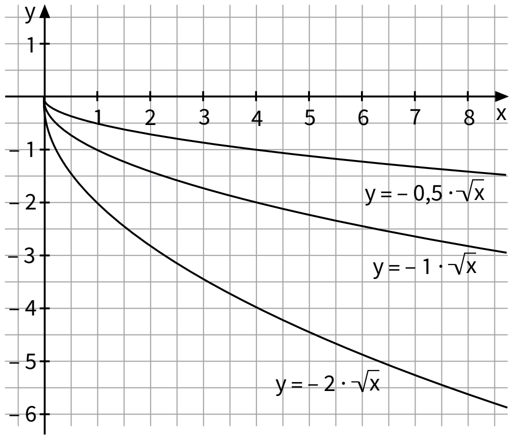
5. Graph wie auf Seite 104 des Schülerbuches (Definition).
a) 0,7; 1,30; 1,70; 2,05; 2,63
b) 0,25; 1,44; 3,24; 5,29; 8,41

6. Der Graph ist ähnlich. Die Quadratwurzelfunktion wurde gestreckt mit Faktor 0,5 (2 und 4).



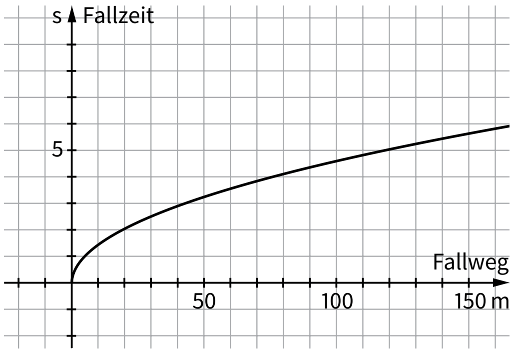
105

7. Da der Streckfaktor kleiner 0 ist, ist der Graph zusätzlich zur Streckung an der x-Achse gespiegelt.



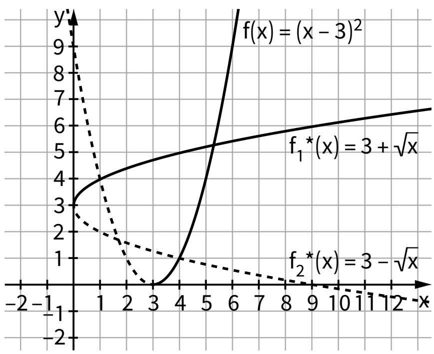
8. **a)** $t = \sqrt{\frac{s}{4{,}9}}$

b) $s = 99{,}225\,m$
$\approx 100\,m$

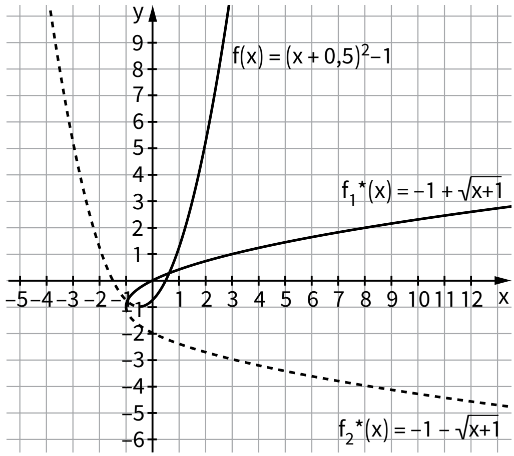


9. **a)** 0,84; 1,24; 1,56; 1,68; 1,88; 2,02
b) 1; 2,20; 4,91; 3; 8;

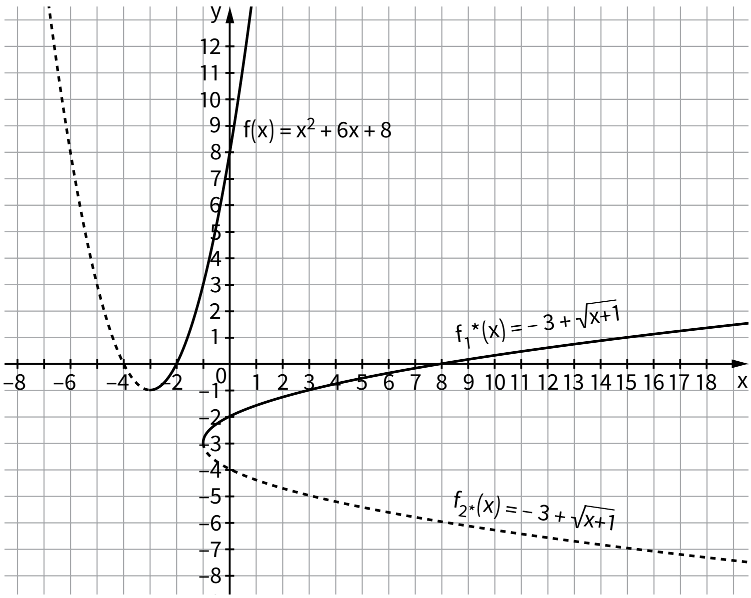
10. **a)** Definitionsbereich:
$x \geq 3$
Umkehrfunktion:
$f_1^*(x) = 3 + \sqrt{x}$
Definitionsbereich:
$x \leq 3$
Umkehrfunktion:
$f_2^*(x) = 3 - \sqrt{x}$



105 **10. b)** Definitionsbereich:
$x \geq -0{,}5$
Umkehrfunktion:
$f_1^*(x) = -1 + \sqrt{x+1}$
Definitionsbereich:
$x \leq -0{,}5$
Umkehrfunktion:
$f_2^*(x) = -1 - \sqrt{x+1}$



c) Definitionsbereich: $x \geq -3$
Umkehrfunktion: $f_1^*(x) = -3 + \sqrt{x+1}$
Definitionsbereich: $x \leq -3$
Umkehrfunktion: $f_2^*(x) = -3 - \sqrt{x+1}$



Auf den Punkt gebracht: Näherungslösungen und exakte Lösungen

106 **1.** –

107 **2.** –

3. –