Name: **Datum:**

Gleichungen - Grundwissen

> Unter einer **<u>Aussage</u>** verstehen wir zwei Terme, <u>von denen keiner eine Variable enthalten darf</u> (sogenannte Zahlenterme), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind:
>
> LinkerZahlenterm = RechterZahlenterm
>
> Von einer Aussage kann man <u>immer</u> sagen, ob sie wahr (w) oder falsch (f) ist.

Beispiele:
- **a)** $6 \cdot 3 - 4 = 14$ (w) ; dies ist eine wahre Aussage
- **b)** $3 \cdot (-2) + 4 = 4 \cdot (-2) - 1$ (f) ; dies ist eine falsche Aussage
- **c)** $10 = 10$ (w) ; dies ist eine wahre Aussage
- **d)** $4 = 3$ (f) ; dies ist eine falsche Aussage

> Unter einer **<u>Gleichung</u>** verstehen wir zwei Terme, <u>von denen mindestens einer eine Variable enthalten muss</u>, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind:
>
> LinkerTerm = RechterTerm
>
> Von einer Gleichung kann man <u>nicht</u> sagen, ob sie wahr oder falsch ist.

Beispiele:
- **a)** $6x - 4 = 14$ ist eine Gleichung
- **b)** $3b + 4 = 4b - 1$ ist ebenfalls eine Gleichung
- **c)** $5(z + 2) = 10 + 5z$ ist ebenfalls eine Gleichung
- **d)** $3y + 4 = 3(y + 1)$ ist ebenfalls eine Gleichung
- **e)** $\frac{4}{p - 2} = 1$ ist ebenfalls eine Gleichung
- **f)** $t^2 - 4 = 0$ ist ebenfalls eine Gleichung

> <u>Belegt man die Variable in einer Gleichung mit einer Zahl</u>, d.h. schreibt man an jede Stelle, an der die Variable in der Gleichung vorkommt, stattdessen die Zahl, <u>so wird dadurch die Gleichung in eine Aussage überführt</u>:

Gleichung	?	Aussage
LinkerTerm = RechterTerm	Belegen der Variablen durch eine Zahl	LinkerZahlenterm = RechterZahlenterm
Variable enthalten, deshalb keine Aussage über wahr oder falsch möglich		keine Variable enthalten, deshalb Aussage über wahr oder falsch möglich

Beispiele:
- **a)** Die Gleichung $6x - 4 = 14$ wird durch Belegen der Variablen x mit der Zahl 3 in die Aussage $6 \cdot 3 - 4 = 14$ überführt; diese Aussage ist wahr.
- **b)** Die Gleichung $3b + 4 = 4b - 1$ wird durch Belegen der Variablen b mit der Zahl -2 in die Aussage $3 \cdot (-2) + 4 = 4 \cdot (-2) - 1$ überführt; diese Aussage ist falsch.
- **c)** Die Gleichung $5(z + 2) = 10 + 5z$ wird durch Belegen der Variablen z mit einer beliebigen Zahl immer in eine wahre Aussage überführt.
- **d)** Die Gleichung $3y + 4 = 3(y + 1)$ wird durch Belegen der Variablen y mit einer beliebigen Zahl immer in eine falsche Aussage überführt.

Die Menge aller Zahlen, die einem für die Belegung der Variablen einer Gleichung zur Verfügung stehen, bezeichnet man als die **Grundmenge G** einer Gleichung.

Soll die Grundmenge einer Gleichung eine andere Zahlenmenge als die Menge der bisher bekannten Zahlen sein, so muss dies ausdrücklich angegeben werden.

Beispiele:

a) $6x - 4 = 14$; $G = \mathbb{Q}$
b) $3b + 4 = 4b - 1$; $G = \mathbb{N}$
c) $5(z + 2) = 10 + 5z$; $G = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
d) $3y + 4 = 3(y + 1)$; $G = \mathbb{Q}$
e) $\frac{4}{p-2} = 1$; $G = \mathbb{Q}$
f) $t^2 - 4 = 0$; $G = \mathbb{Z}$

Die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge, mit der man die Variable einer Gleichung belegen kann, ohne dass sich dadurch ein nicht erlaubter Zahlenterm ergibt, nennt man die **Definitionsmenge D** einer Gleichung.

Ein nicht erlaubter Zahlenterm ist z.B. ein solcher, in dem an irgendeiner Stelle durch 0 dividiert wird; es gibt jedoch auch andere nicht erlaubte Zahlenterme.

Beispiele:

a) $6x - 4 = 14$; $G = \mathbb{Q}$; $D = G$
b) $3b + 4 = 4b - 1$; $G = \mathbb{N}$; $D = G$
c) $5(z + 2) = 10 + 5z$; $G = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $D = G$
d) $3y + 4 = 3(y + 1)$; $G = \mathbb{Q}$; $D = G$
e) $\frac{4}{p-2} = 1$; $G = \mathbb{Q}$; $D = G \setminus \{2\}$, da sonst auf der linken Seite durch 0 dividiert würde
f) $t^2 - 4 = 0$; $G = \mathbb{Z}$; $D = G$

Jede Zahl der Definitionsmenge, die eine Gleichung beim Belegen der Variablen in eine wahre Aussage überführt, nenn man eine **Lösung** der Gleichung.

Die Menge aller Zahlen aus der Definitionsmenge, die die Gleichung beim Belegen der Variablen in eine wahre Aussage überführen, nennt man die **Lösungsmenge L** einer Gleichung.

Beispiele:

a) $6x - 4 = 14$; $G = \mathbb{Q}$; $D = G$; $L = \{3\}$, denn $6 \cdot 3 - 4 = 14$ (w)
b) $3b + 4 = 4b - 1$; $G = \mathbb{N}$; $D = G$; $L = \{5\}$, denn $3 \cdot 5 + 4 = 4 \cdot 5 - 1$ (w)
c) $5(z + 2) = 10 + 5z$; $G = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $D = G$; $L = G$ (Begründung siehe oben)
d) $3y + 4 = 3(y + 1)$; $G = \mathbb{Q}$; $D = G$; $L = \{\ \}$ (Begründung siehe oben)
e) $\frac{4}{p-2} = 1$; $G = \mathbb{Q}$; $D = G \setminus \{2\}$; $L = \{6\}$, denn $\frac{4}{6-2} = 1$ (w)
f) $t^2 - 4 = 0$; $G = \mathbb{Z}$; $D = G$; $L = \{-2 ; 2\}$, denn $2^2 - 4 = 0$ (w) und $(-2)^2 - 4 = 0$ (w)