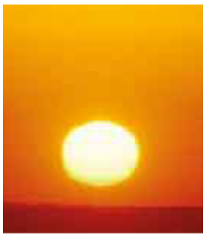
Modellieren von periodischen Vorgängen



Auf der Panorama-Aufnahme fehlen die Zeiten ab 3Uhr nachmittags. Skizziere die Aufnahme in deinem Heft und ergänze das Bild bis ein-schließlich 6Uhr abends.

Da die verschiedenen Tageslängen im Laufe eines Jahres regelmäßig wiederkehren, kann die Tageslänge mithilfe einer Funktion der Form **$f(x)=a\cdot\sin(bx)+d$** modelliert.

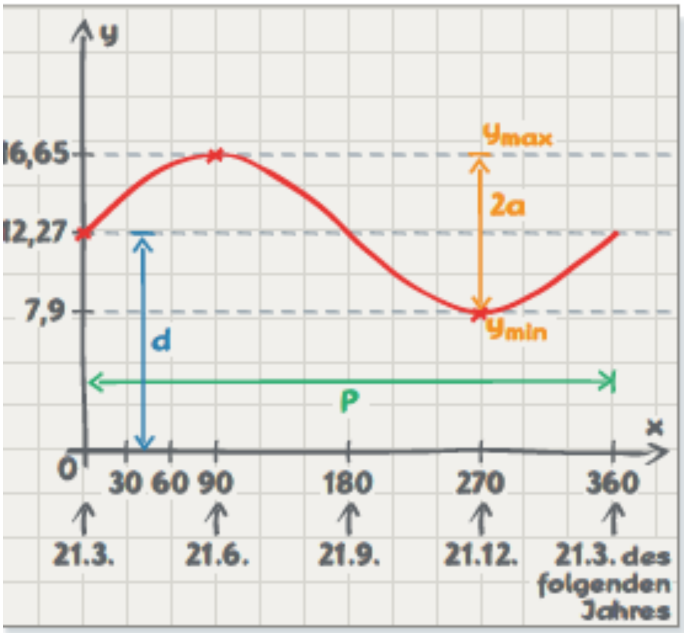
In Grasehein wurden die folgenden Tageslängen gemessen:

Datum	21.03.	21.06.	21.12.
Tag im Jahr	80.	172.	355.
Tageslänge in h	12,27	16,65	7,90

längste Tageslänge 21.6.
kürzeste Tageslänge 21.12.
mittlere Tageslänge 21.3.

Max. 16,65

Min. 7,9

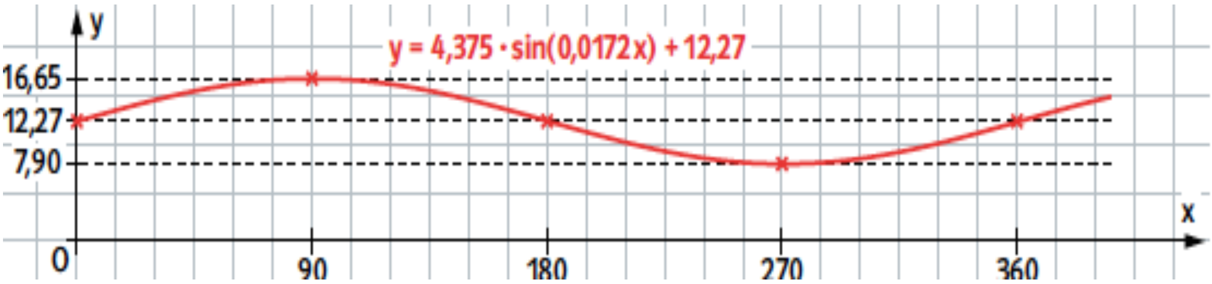


Mithilfe der Skizze lassen sich die Parameter a, b und d in der Funktionsgleichung $f(x) = a\cdot\sin(bx) + d$ bestimmen.

- Für die mittlere Tageslänge d gilt: $d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}$.
- Sie entspricht der Verschiebung in Richtung der y-Achse: $d = 12{,}27$.
- Für die Amplitude a gilt: $a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$. Damit ergibt sich: $a = (16{,}65 - 7{,}90) : 2 = 4{,}375$.
- Die Periodendauer p beträgt 1 Jahr, d.h. 365 Tage.
  Für b gilt $b = \frac{2\pi}{p}$, d.h. $b = \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}0172$.

Funktionsgleichung: $f(x) = 4{,}375 \cdot \sin(0{,}0172\,x) + 12{,}27$.

modellierte Sinusfunktion



Vergleicht man nun die berechneten Werte des Modells mit den Messwerten des ganzen Jahres, so erkennt man, dass das Modell die Wirklichkeit unterschiedlich gut beschreibt, man insgesamt die Tageslänge mit der aufgestellten Funktion aber gut vorhersagen kann, da die größte Abweichung mit 0,29 Stunden nur 17,4 Minuten beträgt.

Datum	21.02.	21.03.	21.04.	21.05.	21.06.	21.07.	21.08.	21.09.	21.10.	21.11	21.12.
x-Wert des Datums	−28	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275
gemessene Tageslänge in h	10,30	12,27	14,24	15,82	16,65	15,90	14,23	12,25	10,31	8,66	7,90
berechnete Tageslänge in h	10,24	12,27	14,49	16,06	16,65	16,05	14,41	12,17	10,02	8,43	7,90
Abweichung in h	0,06	0	0,25	0,24	0	0,15	0,18	0,08	0,29	0,23	0

THEORIE

Bestimmen des Funktionsterms aus dem Graphen

Auf folgende Weise kann man mögliche Werte für die Parameter einer allgemeinen Sinusfunktion mit dem Funktionsterm $f(x) = a \cdot \sin\left(b(x + c)\right) + d$ aus dem Graphen ermitteln:

Zunächst bestimmt man den größten Funktionswert *(Maximum)* und den kleinsten Funktionswert *(Minimum)*.

Dann gilt für die Parameter:

d: Mittelwert aus Maximum und Minimum

a: halbe Differenz von Maximum und Minimum

c: Gegenzahl der ersten positiven Stelle, an der der Funktionswert d beträgt und der Funktionsgraph ansteigt

b: Quotient aus 2π und der Periodenlänge