exponentielles Wachstum - Wachstumsrate

- prozentuale Wachstumsrate
- Wachstumsfaktor
- Verdopplungszeit
- Gleichung aufstellen und Aufgaben lösen

Beispiele exponentieller Wachstumsprozesse:

- Virenbefall eines Organismus: stündliche Vermehrung um 20%
- Algenbefall eines Sees: Fläche wächst um 3 % täglich
- Verzinsung: Sparguthaben wächst um 2% pro Jahr
- Bevölkerungswachstum: Verdopplung alle 30 Jahre

Berechnungen:

Ein Organismus wird von 500 **Viren** befallen. Während jeder Stunde wächst ihre Anzahl um 20%. Wie groß ist die Zahl der Viren zu einer beliebigen Zeit nach der Infektion?

Wertetabelle:

Zeit t/ h	0	1	2
Anzahl			

Zeit t/ h	0	1	2
Anzahl	500	500+ 20%von 500= $500+0{,}2 \cdot 500$ $= 500 + 100 = 600$	600+ 20%von 600= $600+0{,}2 \cdot 600$ $= 600 + 120 = 720$

$N(t) \;=\; N_0 \cdot q^{\,t}$

$N(t) = 500 \cdot q^t \;\rightarrow$

$600 = 500 \cdot q^1 \;\rightarrow$

$q = \dfrac{600}{500} = 1{,}2 \;\rightarrow$

$\mathbf{N(t) = 500 \cdot 1,2^t}$ $\rightarrow$ **q > 1 Wachstum**

$N(t) = 500 \cdot q^t \rightarrow 600 = 500 \cdot q^1 \rightarrow q = \dfrac{600}{500} = 1{,}2 \rightarrow \mathbf{N(t) = 500 \cdot 1,2^t}$

p% prozentuale Wachstumsrate (20%)

q Wachstumsfaktor **q= 100%+p%= 1+$\frac{p\%}{100}$**

T_V Verdopplungszeit (Zeit, in der die Ausgangsmenge sich verdoppelt hat)

$N(t) = N_0 \cdot 1{,}2^{t}$ Es gilt: $N = 2N_0$

$2N_0 = N_0 \cdot 1{,}2^{T} \rightarrow 2 = 1{,}2^{T} \rightarrow T_V = log_{1,2}2 = \mathbf{3{,}8\ h}$

Bsp.

Ein Kapital von 1000 € wird mit 5% Zinsen p.a. angelegt.

- Formel, Wachstumsfaktor?
- In welcher Zeit verdoppelt sich das Kapital?
- Guthaben nach 3 Jahren; 5 Monaten?

Wachstumsfaktor: q= 100%+5%= 1,05

Formel:

$N(t) = N_0 \cdot 1{,}05^{t}$

Verdopplungszeit: $N = 2N_0 \rightarrow 2N_0 = N_0 \cdot 1{,}05^{t} \rightarrow 2 = 1{,}05^{t} \rightarrow$

$t = \log_{1{,}05} 2 = 14{,}21$ Jahre

$2\cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot 1{,}05^{t} \rightarrow 2 = 1{,}05^{t}$ *Ausgangsfläche spielt keine Rolle*

Guthaben nach

3 Jahren: $N(3) = 1000 \cdot 1{,}05^{3} = 1157{,}63$ €

5 Monate 5 Monate= $\frac{5}{12}$ *Jahre* !!!

$N(\frac{5}{12}) = 1000 \cdot 1{,}05^{\frac{5}{12}} = 1020{,}54$ €

Film *Schachbrettproblem*

https://www.youtube.com/watch?v=bWIauQEJIMU&t=16s&frags=pl%2Cwn

Multiple Choice

https://www.mathe-online.at/materialien/JoosLange/files/quiz_rechnen_mit_exponentialfunktionen.html

exponentielles Wachstum - Wachstumsrate

- prozentuale Wachstumsrate, Wachstumsfaktor, Verdopplungszeit, Gleichung aufstellen und Aufgaben lösen

Beispiele exponentieller Wachstumsprozesse:

- Virenbefall eines Organismus: stündliche Vermehrung um 20%
- Algenbefall eines Sees: Fläche wächst um 3 % täglich
- Verzinsung: Sparguthaben wächst um 2% pro Jahr
- Bevölkerungswachstum: Verdopplung alle 30 Jahre

Berechnungen:

Ein Organismus wird von 500 **Viren** befallen. Während jeder Stunde wächst ihre Anzahl um 20%. Wie groß ist die Zahl der Viren zu einer beliebigen Zeit nach der Infektion?

Wertetabelle:

Zeit t/ h	0	1	2
Anzahl			

p% prozentuale Wachstumsrate

q Wachstumsfaktor

T_V Verdopplungszeit (Zeit, in der die Ausgangsmenge sich verdoppelt hat)

<u>Bsp.</u>

Ein Kapital von 1000 € wird mit 5% Zinsen p.a. angelegt.

Wachstumsfaktor : Formel:

Verdopplungszeit:

Guthaben nach :

Übungsaufgaben

1 Berechne die jeweils fehlende Größe beim exponentiellen. Wachstum.

	a	b	c
Anfangsbestand B_0	200	15	40 000
proz. Änderungsrate p%	3,5		
Wachstumsfaktor q			1,025
Formel für B(t)			
Zeitschritte t	7	10	
Bestand nach t Zeitschritten		89810,54	44152,516

2 In einem Labor wird das Wachstum einer Bakterienkultur beobachtet. Das Experiment wurde mit einem Stamm von 2000 Bakterien gestartet. Nach einer Stunde hatte sich die Anzahl um die Hälfte vergrößert. Stelle eine Funktionsgleichung auf, mit der das Wachstum des Bakterienstammes beschrieben werden kann.

Wie viele Bakterien sind nach 4 Stunden vorhanden?

Wann hat sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht?

Zeitgleich zu diesem Experiment wurde ein anderes begonnen, allerdings mit einem Stamm von nur 3000 Bakterien. Nach einer Stunde konnte beobachtet werden, dass der Bestand um 70% gestiegen war.

Bestimme den Zeitpunkt, zu dem beide Stämme gleich viele Bakterien aufweisen.

1965 gab es etwa 3,34 Milliarden Menschen, 1975 waren es 4,08 Milliarden Menschen auf der Erde.

Ermittle anhand dieser Daten eine Funktionsgleichung, mit der sich das Bevölkerungswachstum beschreiben lässt.

Trage auf der t-Achse die Zeit in 10-Jahres-Schritten ab. Eine Einheit auf der $B(t)$-Achse soll für 1 Milliarde Menschen stehen. Wähle außerdem das Jahr 1965 als Zeitpunkt $t=0$.

Wann würde es 12 Milliarden Menschen auf der Erde geben, wenn die Bevölkerung mit dieser Geschwindigkeit weiter wächst?

Wie viel Menschen leben nach 300 Tagen auf der Erde?

Was bedeutet: prozentuale Wachstumsrate beträgt 1?

Übungsaufgaben

1 Berechne die jeweils fehlende Größe beim exponentiellen. Wachstum.

	a	b	c
Anfangsbestand B_0	2	15	400
proz. Änderungsrate p%	3,5	39%	2,5%
Wachstumsfaktor q	1,03	**89810,54= 15· q^{10}** q = 2,39	1,025
Formel für B(t)	B(t)= 2· $1{,}03^t$	B(t)= 15· $2{,}39^t$	B(t)= 400· $1{,}025^t$
Zeitschritte t	7	10	43610.836= 400 · $1{,}025^t$ t = 190
Bestand nach t Zeitschritten	B(7)=2· $1{,}03^7$ ≈2,46	89810,54	43610.836

2 N_0= 5000

1h: N(1)=10 000. Funktionsgleichung: N(t)= N_0· q^t

4 000= 2000 · q^1 → 2= q → N(t)=2000· 2^t

nach 4 h: N(t)=2000· 2^t N(4h)= 32 000 Bakterien

Anzahl der Bakterien verzehnfacht: N(t)=2000· 2^t → 20 000=2000· 2^t →10 =2^t→ t=3,32

3000 Bakterien:

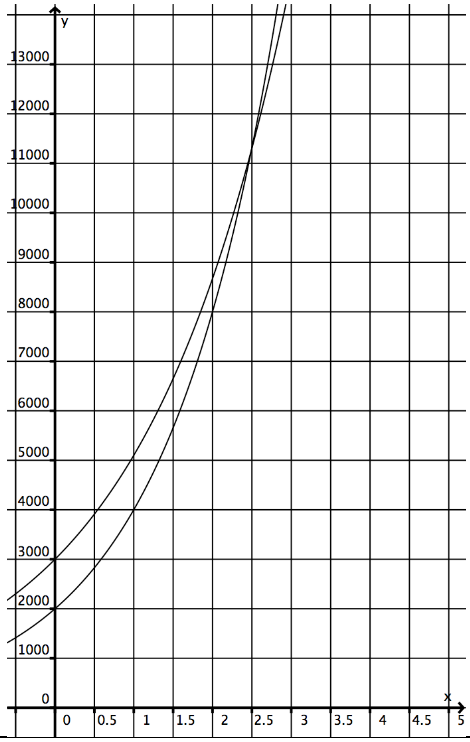
1h → Bestand um 70% : 70% von 3000=2100 → N(1h)= 5100 Bakterien

5100= 3000 · q^1 → 1,7= q → N*(t)=3000· $1{,}7^t$

Zeitpunkt, zu dem beide Stämme gleich viele Bakterien aufweisen:

N(t) = N*(t) → 2000· 2^t = 3000· $1{,}7^t$ → $\frac{2000}{3000} = (\frac{1{,}7}{2})^t$ →

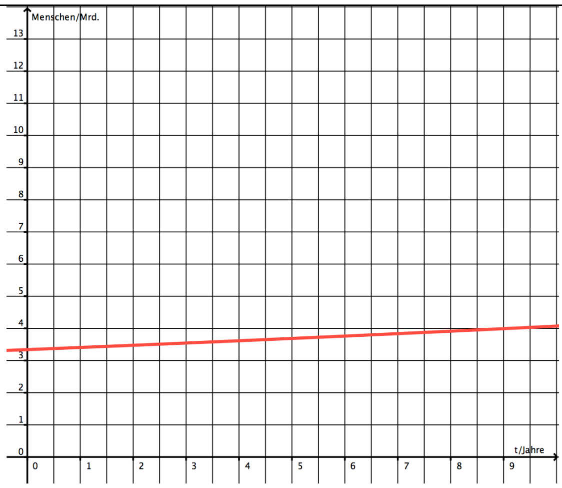
$\frac{2}{3} = 0{,}85^t$ → t= $log_{0{,}85}\frac{2}{3} = 2{,}49h$



1965 - 3,34 Milliarden 1975 - 4,08 Milliarden Menschen

t	0	10
Menschen (Mrd.)	3,34	4,08

Fkt.gl. N(t)= $N_0 \cdot q^t$ → 4,08 = 3,34· q^{10} → $q^{10} = \frac{204}{167}$ → q= 1,02 → **N(t)= 3,34 $\boldsymbol{Mrd \cdot 1{,}02^t}$**



Wann - 12 Milliarden Menschen ?

N(t)= 3,34 $\boldsymbol{Mrd \cdot 1,02^t}$

12 Mrd. = 3,34 $Mrd \cdot 1{,}02^t$

$\rightarrow \quad 1{,}02^t = 3{,}59 \rightarrow t = \mathbf{64{,}58\ Jahre}$

300 Tage = $\frac{300}{365}$

Jahr? - Wachstumsrate p=1=100%

q= 100%+p%= 1+$\frac{p\%}{100}$= 1+$\frac{100}{100} = 2 \rightarrow$

$q = 2$ Wachstumsfaktor

Wert verdoppelt sich jeweils