Natürliche Zahlen

Gebrochene Zahlen

Ganze Zahlen

Rationale Zahlen

rational → *ratio (lat.)* → Quotient $7 : 4 = \frac{7}{4}$

Geteiltaufgabe

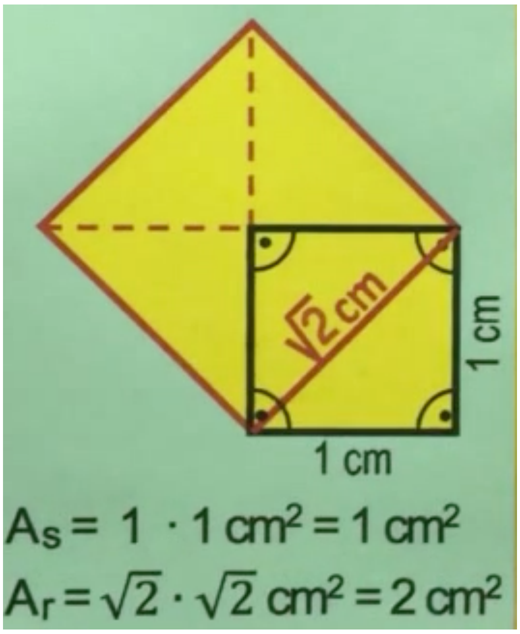
Bruch

= als Bruch darstellbar

$5 = \frac{10}{2}$;	$\frac{7}{4} = 1{,}75$;	$\frac{3}{11} = 0{,}\overline{27} = 0{,}27\,27\,27\ldots$
ganze Zahl	***endliche Dezimalzahl***	***periodische Dezimalzahl***

besondere Zahlen – **irrationale Zahlen**

solch eine Zahl begegnet uns in diesem Bild



Quadrat

Seitenlänge der Diagonalen **e =1**

Seitenlänge des Quadrates **a**= $\sqrt{2}$

Ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl?
Lässt sich $\sqrt{2}$ als gemeiner Bruch darstellen?

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}\;; \quad a,b \in Z;\, b \neq 0; \quad \boldsymbol{a \text{ und } b \text{ teilerfremd}}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Quadratzahlen	
gerade	ungerade
$0^2 = 0$	$1^2 = 1$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$

$$2 \cdot b^2 = a^2 \qquad \Rightarrow a^2 \text{ gerade}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a \text{ gerade}}$$
$$\Rightarrow a = 2 \cdot c\;; c \in Z$$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot b^2 &= 4 \cdot c^2 \\
b^2 &= 2 \cdot c^2 \implies b^2 \text{ gerade} \\
&\qquad\qquad \implies \boldsymbol{b} \textbf{ gerade}
\end{aligned}
$$

Widerspruch zur Annahme, das a und b teilerfremd sind:

$$
\sqrt{2} = \frac{a}{b}\ ; \quad a,b \in Z;\ b \neq 0;\ \boldsymbol{a} \textbf{ und } \boldsymbol{b} \textbf{ teilerfremd}
$$

Widerspruch!!

$$
\begin{aligned}
2 &= \frac{a^2}{b^2} \\
2 \cdot b^2 &= a^2 \qquad \implies a^2 \text{ gerade} \\
&\qquad\qquad \implies \boldsymbol{a} \textbf{ gerade} \\
&\qquad\qquad \implies a = 2 \cdot c\ ;\ c \in Z \\
2 \cdot b^2 &= 4 \cdot c^2 \\
b^2 &= 2 \cdot c^2 \implies b^2 \text{ gerade} \\
&\qquad\qquad \implies \boldsymbol{b} \textbf{ gerade}
\end{aligned}
$$

irrational = nicht rational

= **nicht als Bruch darstellbar**

→ *kein Bruch,*

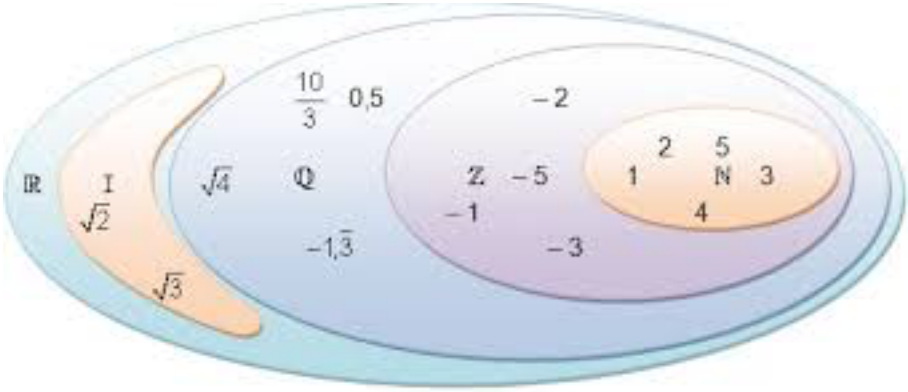
→ *keine ganze Zahl,*

→ *keine endliche oder periodische Dezimalzahl*

= **unendliche, nichtperiodische Dezimalzahl**

▶ $\sqrt{2}$ *ist eine irrationale Zahl!*

In der Praxis



Gibt es eine Technik um wenigstens theoretisch alle Stellen dieser unendlichen Dezimalzahl zu bestimmen?

Intervallschachtelung