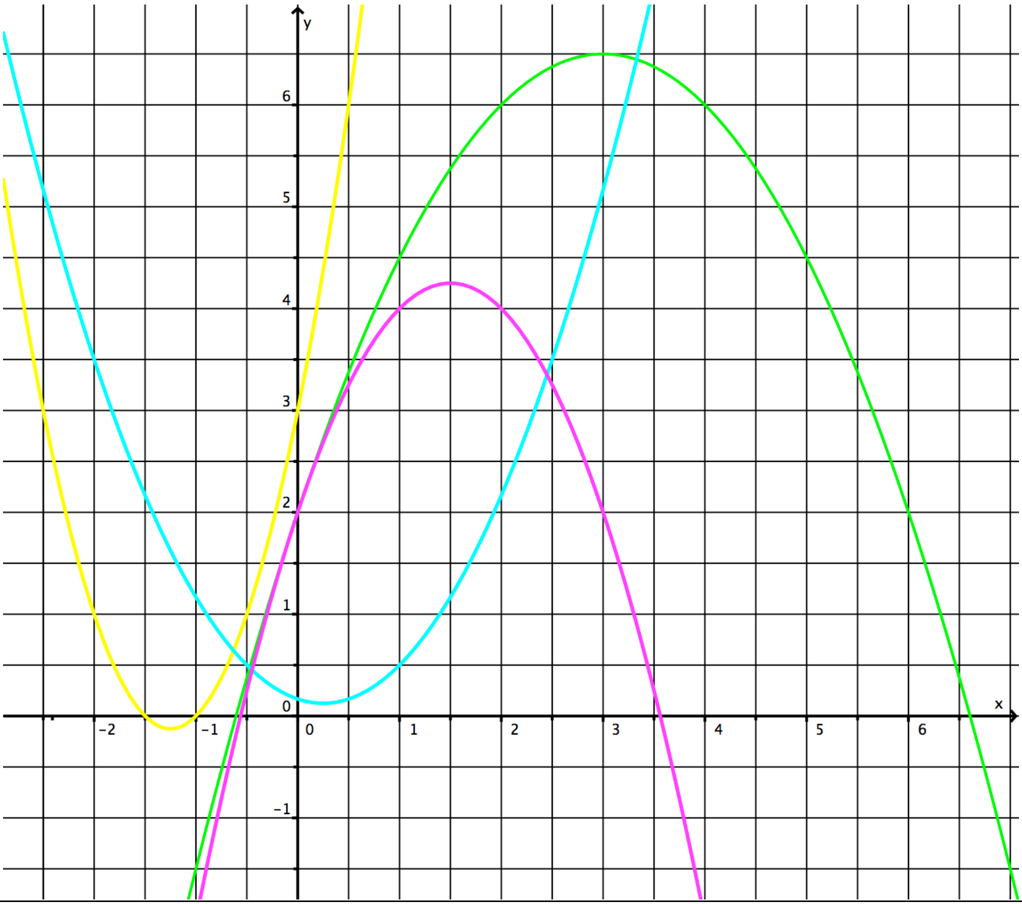
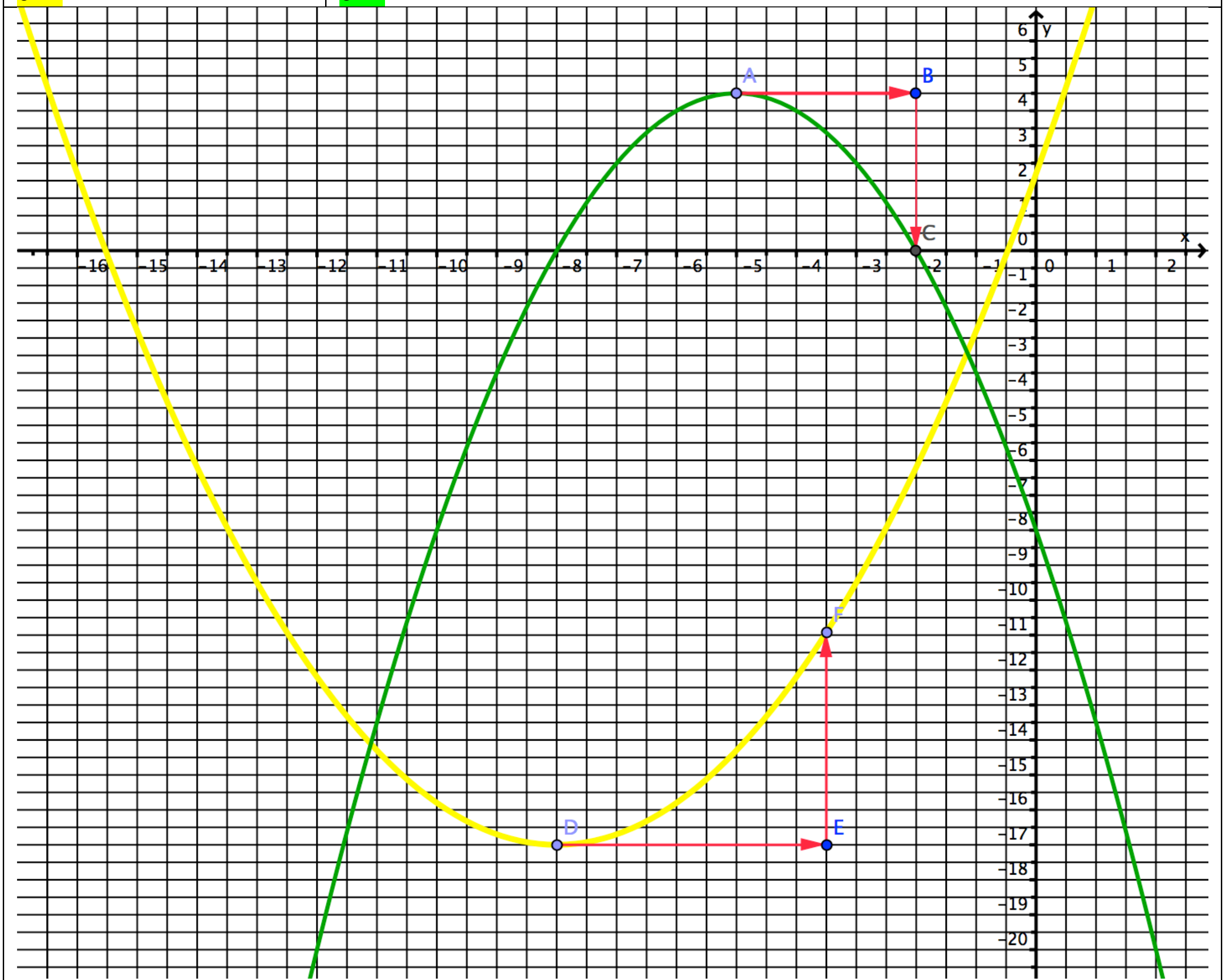
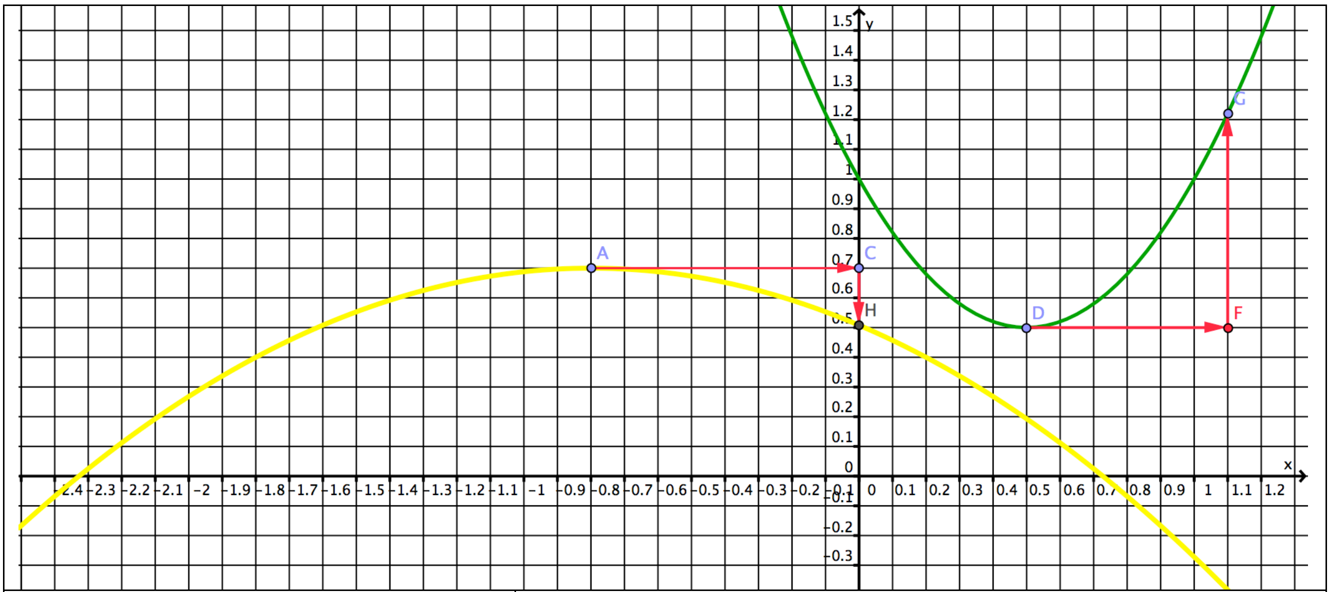
Scheitelpunktform bestimmen			
$y=2x^2+5x+3$	$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+2$	$y=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$	$y=-x^2+3x+2$
$y=2x^2+5x+3$ $y=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)$ $y=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}+\frac{24}{16}\right)$ $y=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$ $y=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ $S\left(-\frac{5}{4}\mid-\frac{1}{8}\right)$	$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+2$ $y=-\frac{1}{2}\left(x^2-6x-4\right)$ $y=-\frac{1}{2}\left(x^2-6x+9-9-4\right)$ $y=-\frac{1}{2}\left[(x-3)^2-13\right]$ $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+6\frac{1}{2}$ $S\left(3\mid 6\frac{1}{2}\right)$	$y=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$ $y=\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$ $y=\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{4}{16}\right)$ $y=\frac{2}{3}\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right]$ $y=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$ $S\left(\frac{1}{4}\mid\frac{1}{8}\right)$	$y=-x^2+3x+2$ $y=-(x^2-3x-2)$ $y=-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-\frac{8}{4}\right)$ $y=-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\right]$ $y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$ $S\left(\frac{3}{2}\mid\frac{17}{4}\right)$
Graphen einzeichnen 			
S_y (0/2)			
$x_1=-1$ $x_2=-1{,}5$	$x_1=6{,}6$ $x_2=-0{,}6$	keine	$x_1=3{,}6$ $x_2=-0{,}6$
Schnittpunkt mit der y- Achse bestimmen x=0			
S_y (0/3)	S_y (0/2)	S_y (0/0,2)	S_y (0/2)
Liegt der Punkt P auf dem Graphen ?			
P(5/78)	P (3/6)	P (-4/12)	P (0,5/13/4)
y= $2\cdot5^2+5\cdot5+3=78$ ja	$y=-\frac{1}{2}\cdot3^2+3\cdot3+2$ $=6{,}5\neq6$ nein	$y=\frac{2}{3}\cdot(-4)^2-\frac{1}{3}\cdot(-4)+\frac{1}{6}=$ $\frac{73}{6}\neq12$ nein	y= $-0{,}5^2+3\cdot0{,}5+2=3{,}25$ ja

Stelle berechnen, wenn y= 2			
2= $2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ $x_1 = -0{,}22$ $x_2 = -2{,}5$	2= $-\frac{1}{2}(x-3)^2+6\frac{1}{2}$ $x_1 = 9$ $x_2 = 0$	2= $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$ $x_1 = 1{,}9$ $x_2 = -1{,}4$	2= $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$ $x_1 = 0$ $x_2 = 3$
Funktionswert berechnen, wenn x= 2			
y= $2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 3 =$ 21	y $= -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 =$ 6	y $= \frac{2}{3} \cdot (2)^2 - \frac{1}{3} \cdot (2) + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$	y= $-2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 4$

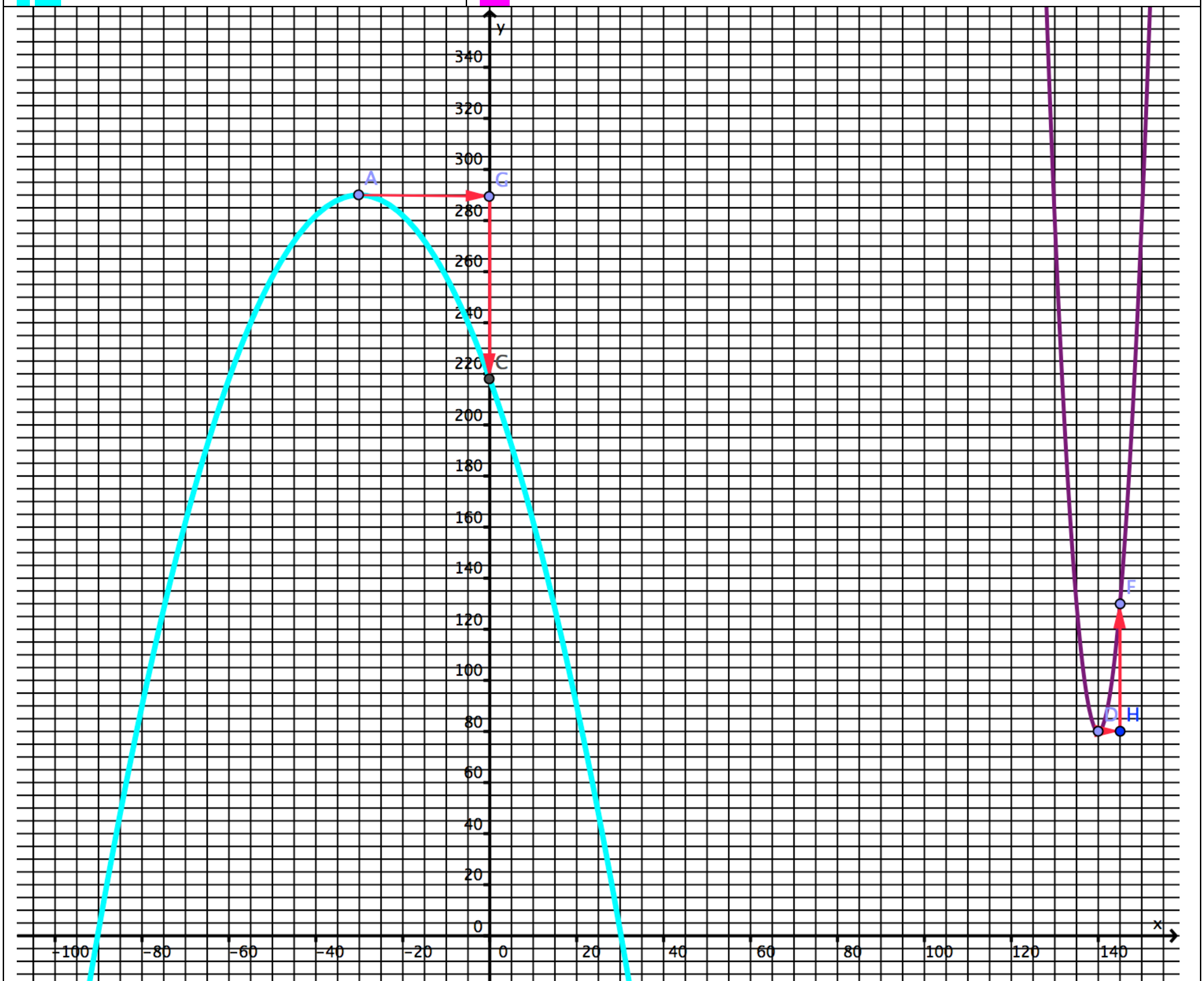
Funktionsgleichung ermitteln	
gelb	grün



NR: z.B $4.5^2 \cdot a = 6 \ \rightarrow a \approx 0{,}3$ **f(x) = 0,3 (x+8)² - 17**	NR: z.B $3^2 \cdot a = 4{,}5 \ \rightarrow a \approx 0{,}5$ **g(x) = - 0,5(x+5)² +4,5**
gelb	grün

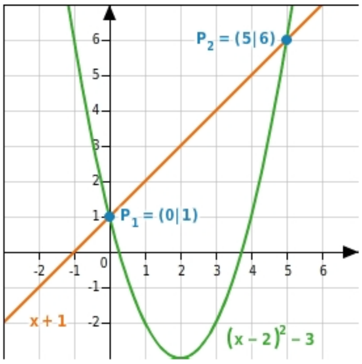


NR: z.B $0,8^2 \cdot a = 0,2 \rightarrow a \approx 0,3$	NR: z.B $0,6^2 \cdot a = 0,7 \rightarrow a \approx 2$
$f(x) =- 0,3 (x+0,8)^2 +0,7$	**$g(x) = 2(x- 0,5)^2 +0,5$**
blau	lila



NR: z.B $30^2 \cdot a = 70 \rightarrow a \approx 0,8$	NR: z.B $5^2 \cdot a = 50 \rightarrow a = 2$
$f(x) = -0.08 (x + 30)^2 + 290$	$g(x) = 2(x - 140)^2 + 80$

Schnittpunkt Quadratische Funktion - lineare Funktion



$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$
$$g(x) = x + 1$$
$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 4x + 1 = x + 1$$
$$x_2 = 5 \quad x_1 = 0$$
$$P_1\ (5|6) \quad P_2(0/1)$$

Gegeben sind die Punkte P_1 (-3 | 5)und P_2 (2 | -1).
Berechnen Sie die Funktionsgleichung

$$P_1(-3\mid 5);P_2(2\mid -1)\Rightarrow f(x)=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$$

Eine Parabel wird von einer Geraden geschnitten. Bestimmen Sie die Schnittpunkte.

$$f_1(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} \qquad f_2(x)=\frac{7}{8}x^2-x-\frac{7}{8}$$

$$f_1(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4};f_2(x)=\frac{7}{8}x^2-x-\frac{7}{8}\Rightarrow P_1(3\mid 4);P_2(-1\mid 1)$$

Hammerwurf

Situationsbeschreibung

Nachdem bei den Olympischen Spielen in London beim Hammerwurf Wettbewerb der Damen die Weitenmessung versagte, analysierten Wissenschaftler der Sporthochschule in Köln den Wurf von Betty Heidler, der vom Kampfgericht zunächst mit einer Weite von 72,34m angegeben wurde. Die Wissenschaftler fanden heraus, dass die Funktion

$$f(x) = -0{,}015x^2 + 1{,}13x + 2{,}08$$

die Flugkurve von Betty Heidlers Hammer bei diesem Wurf beschreibt.

1.1.2 Olympische Verwirrung

Fakten, Fakten, Fakten

Kurz nach der Beendigung des olympischen Hammerwurffinales der Damen sah das Ergebnis folgendermaßen aus:

Gold gewann die Russin Tatjana Lysenko mit 78,18 Metern vor Anita Wlodarczyk aus Polen (77,60). Bronze sicherte sich zunächst Zhang Wenxiu aus China mit 76,34. Sie sollte es nicht behalten.[2]

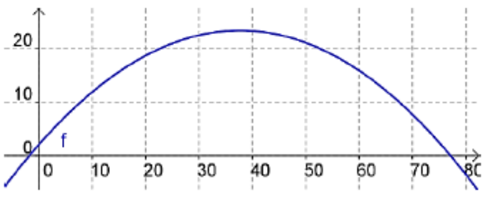
Hinweiskarte

- *Wie weit flog der Hammer von Betty Heidler wirklich?*
  Berechnung der Nullstellen.
- *Wie sieht die Flugkurve des Hammers aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.

1.1.2 Olympische Verwirrung

Lösungskarte

Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x_1 = -1{,}8$ und $x_2 = 77{,}13$. Für die Realsituation spielt nur die positive Nullstelle eine Rolle. Betty Heidler gewann damit Bronze in diesem olympischen Finale.



1.1.2 Olympische Verwirrung

Benzinverbrauch

Situationsbeschreibung

Die Messung von Geschwindigkeit und Benzinverbrauch bei einem Kleinwagen hat ergeben, dass der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit (v in km/h) und Benzinverbrauch (B in $l/100km$) durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann:

$$B(v) = \frac{4}{10000} \cdot v^2 - \frac{24}{1000} \cdot v + 3{,}36$$

Geben Sie eine mathematisch fundierte Empfehlung für eine besonders umweltschonende Fahrweise ab.

1.1.6 Benzinverbrauch

Fakten, Fakten, Fakten

Der Benzinverbrauch von Autos steigt mit der Geschwindigkeit. Das liegt daran, dass mit wachsender Geschwindigkeit der Luftwiderstand aller Körper, also auch eines Autos, immer größer wird und ein großer Teil des Benzins zur Überwindung des Luftwiderstandes benötigt wird.

Hinweiskarte

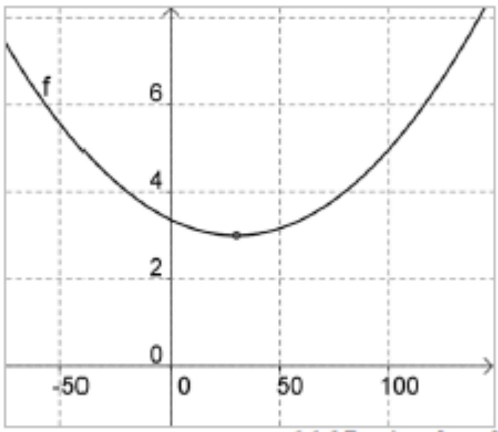
- *Beantwortung der Frage: Wann ist der Benzinverbrauch minimal? Hierzu notwendig:*
- *Berechnung des Minimums der Funktion.* Überführung in Scheitelpunktform und minimalen Verbrauch und zugehörige Geschwindigkeit ablesen.
- *Skizze des Funktionsgraphen.*

1.1.6 Benzinverbrauch

Lösungskarte

Die Funktion in Scheitelpunktform:

$f(x) = \frac{4}{10000} \cdot (v - 30)^2 + 3$. Der Scheitelpunkt liegt also bei S(30 | 3). Eine umweltschonende Fahrweise ergibt sich also bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h mit einem Verbrauch von 3 Litern auf 100 km.



1.1.6 Benzinverbrauch

Diskuswurf

Eine Amateuraufnahme vom Einwerfen der Diskuswerfer bei den Olympischen Spielen in London zeigt angeblich einen Weltrekordwurf des deutschen Werfers Robert Harting.

Technikern ist es gelungen, drei Punkte der parabelförmigen Flugkurve dieses Wurfes zu extrahieren:

P1: 40m weit; 28,15m hoch

P2: 50m weit; 24,25m hoch

P3: 65m weit; 10,53m hoch

Analysieren Sie die Flugkurve des Hammers von Robert Harting.

- Funktionsgleichung für die Flugkurve?
  Funktionsgleichung der quadratischen Funktion mit Hilfe der drei gegebenen Punkte aufstellen.
- Wie sieht die Flugkurve aus?
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.
- Wo landete der Diskus?
  Nullstellen berechnen.
- Auf welcher Höhe wurde der Diskus abgeworfen?
  y-Achsenschnittpunkt berechnen.
- Wo lag der höchste Punkt der Flugkurve?
  Scheitelpunktform.

Lösungskarte

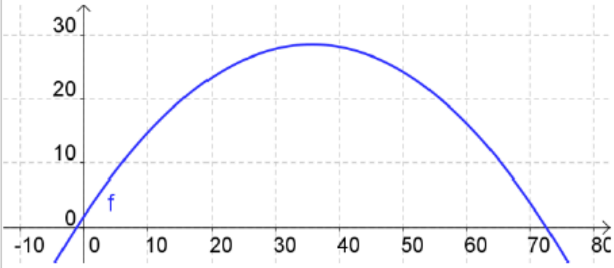
Die Funktionsgleichung, die die Flugkurve des Diskus beschreibt, lautet:

$f(x) = -0{,}021x^2 + 1{,}5x + 1{,}75.$

Der Diskus landet bei einer Weite von 72,58m. Somit ist es Harting nicht gelungen, den Weltrekord von Jürgen Schult zu übertreffen.

Der Diskus wird auf einer Höhe von 1,75m abgeworfen.

Den höchsten Punkt erreicht der Diskus mit 28,54m nach einer Flugstrecke von 35,71m.



1.1.1 Weltrekord beim Diskuswurf?

Raketenbahn

Situationsbeschreibung

Durch Auswertung von Messungen der Ariane 4 Rakete wurde festgestellt, dass sich der Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Sekunden) der Höhe h der Rakete über dem Startplatz (in Metern) bis zum Verlassen der Erdatmosphäre durch eine quadratische Funktion beschreiben lässt. Die folgende Tabelle zeigt die Messwerte:

Zeit t in sec	0	20	40
Höhe h in m	0	760	3040

1.1.7 Raketenstart

Fakten, Fakten, Fakten

Die Erdatmosphäre ist die gasförmige Hülle oberhalb der Erdoberfläche. Sie stellt eine der Geosphären dar und ihr Gasgemisch ist durch einen hohen Anteil an Stickstoff und Sauerstoff und somit oxidierende Verhältnisse geprägt. Als obere Begrenzung der Erdatmosphäre kann eine Höhe von ca. 100 km angenommen werden.

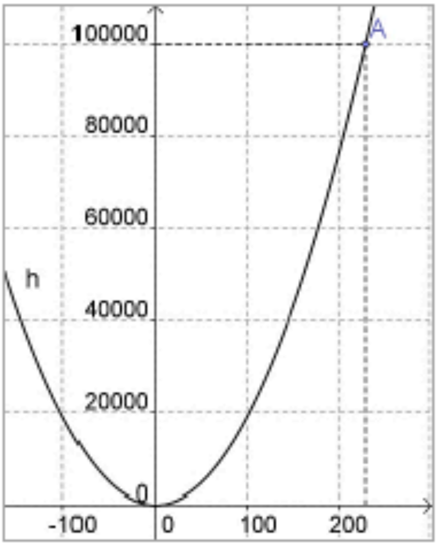
Hinweiskarte

- *Beantwortung der Frage: Nach welcher Zeit verlässt die Rakete die Erdatmosphäre? Hierzu nötig:*
- *Wie sieht die Funktionsgleichung aus?* Bestimmung der Funktionsgleichung.
- *Nach welcher Zeit wird die Erdatmosphäre verlassen?* Funktionsgleichung mit 100 km gleichsetzen und nach t auflösen (Achtung! Höhe in der Wertetabelle ist in m und nicht in km angegeben).
- *Skizze des Graphen.*

1.1.7 Raketenstart

Lösungskarte

Die Funktionsgleichung $f(t) = 1{,}9t^2$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Zeit t und der Höhe h der Ariane 4 Rakete. Die Rakete verlässt die Erdatmosphäre nach 229,416 Sekunden (≈ 3,82 Minuten).



1.1.7 Raketenstart

Quadratische Funktionen - Anwendungsaufgabe

Die Straßenverkehrsordnung bestimmt, wie schnell man fahren darf. Die Geschwindigkeit ist den Straßen-, Ver-kehrs-, Sicht- und Wetter-verhältnissen so anzupassen, dass der Fahrer sein Fahrzeug immer beherrscht und so keine anderen Verkehrsteilnehmer gefährdet oder gar schädigt. Trotzdem werden Fahrgeschwindi-keiten immer wieder falsch gewählt. Nicht angepasste Geschwindigkeit ist die Unfallursache Nummer Eins. Besonders auf Autobahnen kann es durch unterschiedliche Geschwindigkeiten von verschiedenen Fahrzeugen zu Unfällen mit meist tragischem Ausgang kommen.

1 Zuerst wird die Bewegung eines LKW, der auf der linken Spur ein anderes Fahrzeug überholt, durch folgende Wertetabelle beschrieben:

Zeit t / s	1	1,5	2	3	3,5
Ort s/ m	76	86	96	116	126

a Erstelle ein Koordinatensystem mit beschrifteten und skalierten Achsen zur Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Zeit t und dem Ort s. Dabei soll die Zeit auf der Abszisse, das ist die horizontale Achse, und der Ort auf der Ordinate, das ist die vertikale Achse, aufgetragen werden. Lege das Koordinatensystem so an, dass später noch der Zeitpunkt 7s und der Ort 160m eingetragen werden kann.

b Trage die Wertepaare aus der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem ein.

c Warum kann der Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Ort des LKW durch eine lineare Funktion beschrieben werden?

d Zeichne den Graphen dieser Linearen Funktion in ein Koordinatensystem ein.

e Bestimme den Steigungsfaktor (Anstieg) dieser linearen Funktion mit Maßeinheit. Erläutere die Bedeutung dieses Wertes für die Bewegung des LKW.

f Gib den Funktionsterm s(t) dieser linearen Funktion an.

g Berechne den Ort des LKW zum Zeitpunkt 2,5sec. Berechne den Zeitpunkt, zu dem sich der LKW am Ort 146m befindet. Überprüfe das Ergebnis anhand des Graphen.

h Nun rast auf der linken Spur ein PKW heran, dessen Fahrer kurz abgelenkt war und deshalb den LKW zu spät bemerkt hat. Der Fahrer macht eine Vollbremsung, die durch folgende Wertetabelle beschrieben wird:

Zeit t / s	0	1	2	3	4	5
Ort s/ m	0	46	84	114	136	150

i Trage die Wertepaare aus der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem aus und zeichne den Graphen. Gib den Scheitelpunkt an und interpretiere dessen Koordinaten im Sinne der Sachaufgabe.

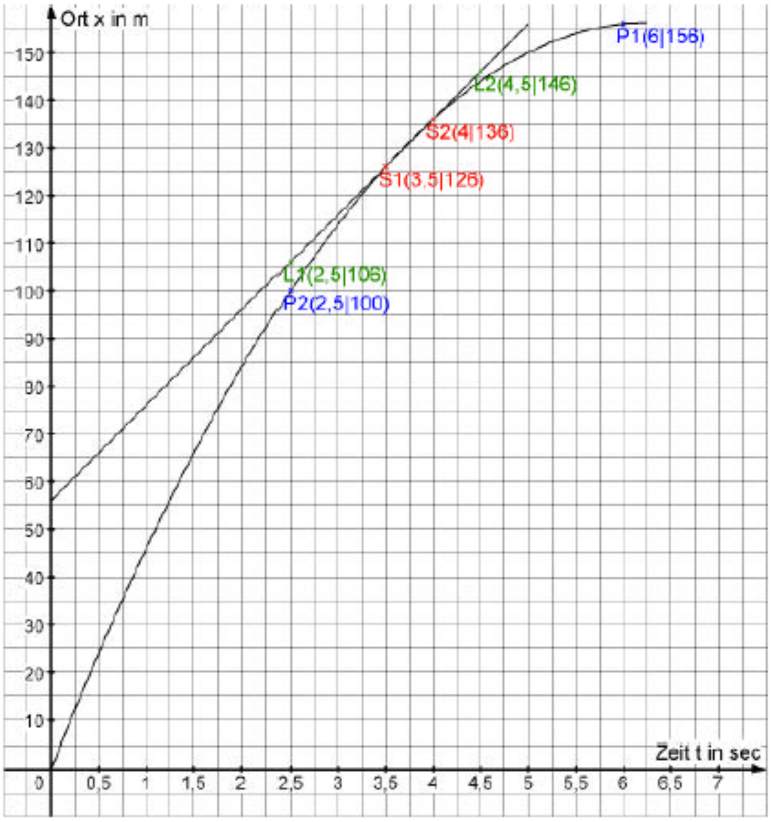
j Begründe anhand der Lage der Punkte im Koordinatensystem, warum der Zusammenhangs zwischen der Zeit und dem Ort des PKW höchstwahrscheinlich durch eine Quadratische Funktion beschrieben werden kann.

k Berechne den Ort des PKW zum Zeitpunkt 6s.
Berechne den Zeitpunkt, zu dem sich der PKW am Ort 100m befindet.

l Berechne die Schnittpunkte der zwei Graphen und überprüfe das Ergebnis anhand der beiden Graphen und interpretiere die Koordinaten der Schnittpunkte im Sinne der Sachaufgabe.

m Berechne den Abstand von LKW und PKW zum Zeitpunkt der Vollbremsung.
Die Geschwindigkeit des PKW betrug zum Zeitpunkt des Bremsvorgangs v= 180 $\frac{km}{h}$. Bei dieser

	Geschwindigkeit wird ein Mindestabstand von 90m empfohlen. Vergleiche den tatsächlichen Abstand mit dem gesetzlich empfohlenen.

	
b	Aus der Wertetabelle ist ersichtlich, dass sich in gleich großen Zeitintervallen (0,5sec) der Ort des LKW um jeweils gleich große Beträge (10m) verändert. • Punkte liegen auf einer Geraden
c	
d	
e	Steigungsfaktor: $v = \frac{96\text{m} - 76\text{m}}{2\text{sec} - 1\text{sec}} = 20\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; der Ort des LKW ändert sich pro sec um 20m. Dies ist die Geschwindigkeit des LKW.
f	Funktionsterm: $x_L(t) = 20 \cdot t + n$, mit noch zu bestimmenden Ordinatenabschnitt n. Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Messpaares (z.B. $(1 \| 76)$) in die Gleichung $x = 20 \cdot t + n$ liefert: $76 = 20 \cdot 1 + n \Leftrightarrow 56 = n$; $L = \{56\}$. Mit Maßeinheiten ergibt sich somit der Wert 56m für den Ordinatenabschnitt. Dies ist der Ort des LKW zum Zeitpunkt der Bewegungsaufnahme.
g	Gesucht ist $x_L(2{,}5\,\text{sec}) = 20\frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot 2{,}5\,\text{sec} + 56\text{m} = 106\text{m}$. Der LKW befindet sich zum Zeitpunkt 2,5sec am Ort 106m. Gesucht ist die Stelle zum Wert 146: $x_L(t) = 146 \Leftrightarrow 20 \cdot t + 56 = 146 \Leftrightarrow t = 4{,}5$; $L = \{4{,}5\}$. Der LKW befindet sich zum Zeitpunkt 4,5sec am Ort 146m.
h	
i	$-4(t - 6{,}25)^2 + 156{,}25$

	Der Scheitelpunkt ist also $S(6{,}25 \mid 156{,}25)$; somit hat der PKW nach 6,25sec 156,25m zurückgelegt und kommt zum Stillstand (Scheitelpunkt!). Nach 156,25m ist der Bremsweg zu Ende und der PKW steht, d.h. er würde nach 6,25sec anfangen rückwärts zu fahren. (Das macht keinen Sinn!)
j	Punkte liegen auf einer Parabel
k	Gesucht sind die Stellen zum Wert 100: $x_P(t) = 100$ $\Leftrightarrow -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t = 100$ $\Leftrightarrow -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t - 100 = 0$ $L = \{2{,}5; 10\}$ Lediglich die erste Lösung 2,5 ist im Sinne der Sachaufgabe von Relevanz (vgl. die Lösung von **i)**). Am Ort 100m befindet sich der PKW 2,5sec nach dem Beginn der Vollbremsung. Zu berechnen ist $x_P(6) = 156$. Am Ort 156m befindet sich der PKW 6sec nach dem Beginn der Vollbremsung.
l	Zu berechnen sind zuerst die Schnittstellen der Funktionen: $x_P(t) = x_L(t)$ $-4t^2 + 50t = 20t + 56$ $-4t^2 + 30t - 56 = 0$ $t^2 - 7{,}5t + 14 = 0$ $(t - 3{,}75)^2 - 14{,}0625 + 14 = 0$ $(t - 3{,}75)^2 - 0{,}25^2 = 0$ $(t - 3{,}75 + 0{,}25) \cdot (t - 3{,}75 - 0{,}25) = 0$ $(t - 3{,}5) \cdot (t - 4) = 0$ $t = 3{,}5 \vee t = 4$ $L = \{3{,}5; 4\}$ Daraus ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte: $x_L(3{,}5) = 126;\ x_L(4) = 136$ Die Schnittpunkte sind somit $S_1(3{,}5 \mid 126)$ und $S_2(4 \mid 136)$. Die Lösung 3,5 gibt die Zeit an in Sekunden, nach der tatsächlich beide Fahrzeuge am selben Ort angelangt sind, also den Moment des Auffahrens. Die Lösung 4 gibt die Zeit an, zu der sich beide Fahrzeuge ein weiteres Mal am selben Ort befänden, würden sie nach dem Auffahren nach 3,5sec ihre Wege (unvermindert bzw. unbeschleunigt) gemäß der Wertetabellen fortsetzen. Der gesuchte Funktionsterm ist: $x_P(t) = -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t$.
m	Die beiden Ordinatenabschnitte 0m und 56m geben die Orte der jeweiligen Autos an zum Zeitpunkt 0sec, also dem Zeitpunkt, an dem Zickler seine Vollbremsung startet. In diesem Moment sind demnach beide Autos 56m voneinander entfernt. Dieser Abstand ist zwar objektiv zu gering, nämlich nur ca. $3/10$ des Tachowertes in km/h, wird aber von der Polizei nicht als zu geringer Mindestabstand geahndet.